JOURNAL for the HISTORY of ARABIC SCIENCE



Vol. 6
Nos. 1 & 2
1982

مجلة تاريخ العلوم العربية

University of Aleppo
Institute for the History of Arabic Science
Aleppo,Syria

مجلة تاريخ العلوم العربية

المجلد السادس | العددان الأول والثاني | ١٩٨٢

محتويات العدد

القسم العربي

الابحــاث :

ملخصات الابحاث المنشورة في القسم الاجنبي

نصوص لتأريخ الأعداد المتحابة وحساب التوافقات

رشدي راشد

ستبين النصوص التي ننشرها ههنا محققة مدى ما بلغته نظرية الأعداد الأولية من تقدم ومدى ما وصل إليه حساب التوافقات من نتائج على أيدي من كتب بالعربية في أواخر القرن الثالث عشر الميلادي خاصة . فالنص الأول ، وهو أهمها بكثير ، يكفي وحده لبيان خطأ من توهم — وهم أكثر المؤرخين — أن نظرية الأعداد هي أفقر فروع الرياضيات العربية قاطبة . وكيف يكون هذا الوهم ممكناً ؟ أليس من العجيب ألا تتطور نظرية الأعداد بعد ما حققه الجبر الحسابي من تقدم بفضل الكرجي ومدرسته ؟ وكذلك ستطيح هذه النصوص بوهم آخر ، ألا وهو خطأ من ظن أن اللجوء إلى المثلث الحسابي لدراسة مجموعات الأعداد المثلثة وما فوقها من المراتب وأن التفسير التوافقي لعناصر المثلث الحسابي ، هما من مكتسبات القرن السابع عشر .

فبعد قراءة هذه النصوص سنرى ، بما لا يدع للشك مجالاً ، أن نظرية الأعداد لم تقف عند تراث الإسكندرية ، أي عند نقل وشرح الكتب العددية من « أصول » أوقليدس « ومقدمة » نيقوماخوس، بل لا تقف حتى عند ما زاده ثابت بن قرة — وخاصة نظريته في الأعداد المتحابة — وغيره من أمثال عبد القاهر البغدادي . فنظرية الأعداد ذهبت إلى أبعد من ذلك بكثير بفضل الجبر ، أو على وجه التحديد بفضل تطبيق الوسائل الجبرية التي ابتدعها الكرجي ومدرسته في دراسة الأعداد وخصائصها . ولعل أهم نتيجة لهذا التطبيق هو ظهور فصل جديد في نظرية الأعداد لم يكن معروفاً من قبل ، لا بهذا الاتساع ولا بهذه الصورة التي نجده عليها في الرياضيات العربية ، فضلاً عن أسلوب حديث في النظر والبرهان ، سيكون هو أسلوب نظرية الأعداد فيما بعد حتى سنة ١٦٤٠ على الأقل . أما هذا الفصل الجديد ، فيتضمن كل ما لا غنى عنه في البحث عن خصائص أجزاء الأعداد وقواسمها ، وهذه الخصائص نفسها . والباعث وراء هذه الدراسات لم يكن إلا البحث عن برهان آخر غير برهان ثابت بن قرة للبرهان على نظريته عن الأعداد المتحابة . وأما الأسلوب الحديث ، فهو توافقي ، جبري ، فلم يعد هندسياً دون أن يصبح عددياً خالصاً .

هذه هي بالجملة مميزات النص الأساسي والأول الذي نقدمه ههنا ، وهو رسالة كمال الدين الفارسي في الأعداد المتحابة ، والتي تضم بين قضاياها كثيراً مما ينسب عادة إلى علماء القرنين السادس عشر والسابع عشر ، أو ما بعدهما أحياناً . ونجد بين هذه القضايا :

- أول صياغة معروفة حتى يومنا هذا لما يُسمى بنظرية الحساب الأساسية ، أي أن كل عدد يمكن تحليله وبصورة واحدة إلى عناصر أولية منتهية العدة .
- أول دراسة معروفة لتابع مجموع أجزاء العدد ولتابع مجموع قواسمه ، والبرهان على جدائية هذا الأخير .
- أول دراسة معروفة لبعض خصائص تابع عدد أجزاء العدد وتابع عدد قواسمه ؛ ومن ثم أول دراسة معروفة للتوابع الحسابية الأولية ، والتي كانت تُعزى ، هي وكثير من القضايا التي برهن عليها الفارسي ، إلى ديكارت وآخرين من بعده .

ومما ينبغي التنبه له هو لجوء الفارسي إلى المثلث الحسابي لدراسة مجموعات الأعداد المثلثة وما فوقها من المراتب . واضطره هذا الى تفسير توافقي لا غموض فيه لهذا المثلث ، وهو التفسير الذي كان ينقص الكرجي والسموءل من بعده كما بينا في موضع آخر[1] ، والذي سيقوم به بسكال مرة أخرى . ومن الملاحظ أن الفارسي لا يقف عند هذا التطبيق وعند تلك العبارات التوافقية للتفسير والشرح ؛ مما يدل على أنها كانت شائعة مألوفة في عصره .

وينهي الفارسي رسالته هذه بحساب ما سُمي بعددي فرما ، أي ١٧٢٩٦ و ١٨٤١٦ ، وبالبرهان على أنهما متحابان .

ونستطيع الآن أن نقطع بأن رياضيي هذا العصر كانوا على معرفة بهذين العددين ؛ ولكن لا يمكننا أن نقرر من هو أول العارفين بهذا الأمر . فنحن لا ندري بالدقة متى كان تحرير الفارسي لكتابه ، إلا أن هذا قد تم قبل عام ١٣٢٠ وهو تاريخ وفاة الفارسي . ولكن النص الثاني الذي ننشره هنا ، وهو نص التنوخي ، الذي حرر سنة ١٣٠٧ يضم العددين والبرهان على تحابهما . فكل ما نستطيع أن نقوله الآن هو أنه بين ١٣٠٧ و ١٣٢٠ على أكثر تقدير كان هناك على الأقل شاهدان على ما أثبتنا . بل يمكننا أن نزيد على هذا ونبين بفضل

١ ـ انظر إلى مقالنا Algèbre et linguistique: l'analyse Combinatoire dans la science arabe; dans R. Cohen, *Boston Studies in the Philosophy of Sciences*, Reidel Pub. Company, 1973, p. 383-399.

النص الثالث أن العددين المتحابين – ٩٣٦٣٥٨٤ و ٩٤٣٧٠٥٦ – اللذين يحملان اسم ديكارت كان قد تم حسابهما على يدي محمد باقر بن زين العابدين اليزدي قبل الفيلسوف بقليل .

أما النص الرابع فهو لابن البناء المراكشي ، وهو فصل من كتابه المُسمى ب« رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب » . وهذا الكتاب هو تفسير وشرح لكتابه المعروف « تلخيص أعمال الحساب » أو كما قال هو نفسه وشرح مقصده في مقدمة « رفع الحجاب » : « فإن كتابي الذي وضعته في تلخيص أعمال الحساب ، وتقريب معانيه ، وضبط قواعده ومعانيه ، قد جمع صناعة العدد العملية بصنفي المعلوم والمجهول . فأردت إيضاح ما يغمُضَّنه من العلم ، وشرح ما يظن غير المُحصل أنه مستغلق فيه على الفهم ، وبيان أصول القواعد والمباني » .

وإذ قد أتينا بهذا النص هنا ، فلما يحتويه من قضايا رياضية في حساب التوافقات ، وأيضاً للدلالة التاريخية التي يدل عليها . فلنذكر أولاً بهذه القضايا . وقبل هذا فلنرمز بـ $(n)_r$ إلى عدد الصور من الحجم r المأخوذة من مجموعة A عدتها n ، $(r \leqslant n)$ ؛ فمن السهل برهان أن :

$$(n)_r = n(n-1) \dots (n-r+1).$$

والآن يمكننا ترجمة قضايا ابن البناء على النظم التي وردت في كتابه :

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r\,!} ,$$

$$(n)_n = n\,! ,$$

$$(n)_r = r\,!\binom{n}{r} ;$$

وهذه القضايا مبرهنة إلا للحالتين $r = 1 , r = 0$ ؛ وأخيراً القضية التالية التي لم يقم البرهان عليها :

إذا كانت $A = (m_1, \dots, m_n)$ مجموعة من الحروف عدتها n ، متميزة كلها ، وكان $u(A)$ تبديلاً ما من تباديل المجموعة A ، وليكن أول حروفه m_k مثلاً ، فإنه يمكننا الحصول على كل تباديل A من المتتالية التي نحصل عليها بتكرار $u(A)$ ، $(n-1)$ مرة ثم إضافة m_k . وهكذا فكل تباديل A هي داخل المتتالية الحادثة والتي عدد حروفها $n(n-1) + 1$.

مثال ذلك: فلتكن مجموعة الحروف $A = (a,b,c,d)$ ، ولنأخذ تبديلاً ما وليكن (b,d,a,c)؛ فإنه يمكننا الحصول على كل تباديل A من المتتالية ذات $1 + (3 \times 4)$ حرفاً :

$$(b, d, a, c, b, d, a, c, b, d, a, c, b)$$

هذا هو ما نجد في نص ابن البناء ، وهو ما يمكن استنباطه بسهولة فائقة من القانون الأساسي للمثلث الحسابي ، الذي كان منتشراً معروفاً بين الرياضيين من بعد ما أقامه الكرجي في أواخر القرن العاشر . وهذا القانون ، أعني

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1},$$

هو ما يطبق الفارسي بصور متعددة ، ومرات متتابعة ، ويفسره بأسلوب توافقي خالص . ولكن يبقى عند الفارسي ما لا أثر له عند ابن البناء ، وهو الربط الواضح العام بين المجتمعات العددية وبين المثلث الحسابي ، وأيضاً التفسير التوافقي لعناصر هذا المثلث ، أي الخطوة الأساسية لتكوين حساب التوافقات كفصل مستقل من فصول الرياضيات .

وإذا كان ذلك كذلك ، فمن المرجح أن كثيراً من القضايا السابقة المتعلقة بالقانون الأساسي أو بمشتقاته ، هي مما ورّث السلف لابن البناء والفارسي وغيرهم ، فهذا الأخير قد وافته المنية عام ١٣٢٠ — كما قلنا — وفي تبريز ، وابن البناء لم يخلفه الا عاماً واحداً — وبالمغرب . والأول يقوم ببحث أصيل أراد فيه العثور على برهان جديد لنظرية ثابت بن قره في الأعداد المتحابة ، بينما أراد الثاني أن يكتب كتاباً تعليمياً يشرح فيه كتاباً تعليمياً آخر له ، ويرفض صراحةً معالجة الأعداد المتحابة . فما بقي بينهما من اتفاق لا يمكن إلا أن يرجع ، حسب ما يبدو لنا ، إلى ما ورثوه .

أما النص الخامس فهو لبيان مدى انتشار عددي « فرما » بين الرياضيين والشراح . فهذا النص يبين لنا أن مؤلفه المتوفى في أوائل القرن الخامس عشر الميلادي ، وهو ابن هيدور التادلي ، من شراح ابن البناء المراكشي ، كان على معرفة بهذين العددين كما كان يريد أن يحرر رسالة يأتي فيها بالبرهان على تحاب الأعداد ، أي بما لم يفسح به المجال في كتابه « التمحيص في شرح التلخيص » الذي أخذنا منه هذا النص .

لقد قمنا[١] من قبل بدراسة تاريخية ورياضية لهذه النصوص ولغيرها ، ولا نريد أن نكرر هنا ما قلناه هناك ، وسنكتفي هنا بتقديم هذه النصوص أنفسها .

١ — انظر إلى المقدمة الفرنسية .

كتب كمال الدين الفارسي[1] شرحاً لكتاب ابن الخوام البغدادي — « الفوائد البهائية في القواعد الحسابية » هو أضخم ما ألفه في الرياضيات ، وسماه « أساس القواعد في أصول الفوائد » . وبين كتاب الفارسي هذا وبين رسالته في الأعداد المتحابة صلة وثيقة لم ينتبه لها المؤرخون القدماء مثل طاش كبري زاده ولا المحدثون مثل بروكلمان ، سوتر ، كراوسه . فمما أورده الفارسي نفسه نعرف أنه ألحق « التذكرة » بأساس القواعد كتتمة له . ففي مستهل هذا الأخير يعرض الفارسي للأعداد المتحابة بقوله[2]: « فأما طريق استخراج المتحابين وحصر الأجزاء — بأن يتيقن أنه لا جزء غير ما عرف وسائر أصوله وفروعه — واستخراج الأعداد التامة والزائدة والناقصة ، فسيلحق بآخر هذا الكتاب على ما يساعد التوفيق » . وقول الفارسي هذا إن لم يدل على أنه قد حرر « التذكرة » قبل شروعه في كتابه « أساس القواعد » ، فإنه يبين على الأقل أنه كان يعرف ما ستتضمنه « التذكرة » ، وأنه لم يكن يعتبر أنهما مصنفان منفصلان .

وما سبق يفسر لنا تماماً ظهور مخطوطة « التذكرة » كجزء من مخطوطة « أساس القواعد » . فنحن لا نعرف أية مخطوطة مستقلة « للتذكرة » ، وإن كنا كثيراً ما نجد أساس القواعد دون تلك الرسالة ، كما يشهد بذلك — على سبيل المثال لا الحصر — المخطوطات الثلاث لهذا الأخير بمكتبة السلطان أحمد الثالث . وسقوط « التذكرة » في مثل هذه الأحوال يرجع مما لا شك فيه إلى النساخ في حياة المخطوطة الطويلة .

ويمكننا أن نستشف من كتابات المؤرخين أن « تذكرة » الفارسي هذه كانت معروفة متداولة حتى القرن السادس عشر على الأقل ، ويكفي في هذا الصدد أن نقرأ ما يقول صاحب « مفتاح السعادة » : « أما طريق استخراج الأعداد المتحابة فقد بُيِّنَ مستَوْفى ببراهين عددية في كتاب « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » ، وهذا كتاب نفيس ، يدل على فضل مؤلفه ، وعلو كعبه في العلوم الرياضية ، يشهد بذلك كتابه المذكور » . ونقرأ أيضاً في كتاب حاجي خليفة عند كلامه على علم الخواص « ومنها خواص الأعداد المتحابة والمتباغضة كما بُين في تذكرة الأحباب في بيان التحاب »[3]

١ — انظر مقالة Kamāl-al-Dīn في
Dictionary of Scientific Biography (New York, Scribner's), vol. VII, 1973.

٢ — انظر صفحة ١٤ — و من مخطوطة آستان قدس رضوى التي سنشير إليها فيما بعد بقليل .

٣ — انظر طبعة كامل كامل بكري وعبد الوهاب أبو النور ، القاهرة ١٩٦٨ ، الجزء الأول ، ص ٣٩٦ . ومن الواضح أن حاجي خليفة يستند إلى هذا النص نفسه .

وحتى وقت قريب لم يُعرف من مخطوطات هذه الرسالة إلا ما ذكره كراوسه[1] ، أي مخطوطة مكتبة كوبرولو . ولقد عثرنا في أوائل السبعينيات على مخطوطة أخرى « للتذكرة » بمكتبة آستان قدس رضوى ، ثم عثرنا بعد ذلك على مخطوطة ثالثة بمكتبة خدا بخش ، وكذلك على فقرة من هذه الرسالة في مكتبة الوزير الشهيد علي . وبعد العثور على هذه النسخ أصبح من الممكن التحضير لنشرة نقدية لهذه الرسالة . ونعرض الآن تباعا لهذه المخطوطات .

أ – مخطوطة كوبرولو ٩٤١ .

ذكرها كراوسه ، كما قلنا ، وهي تشتمل على :

- « أساس القواعد في أصول الفوائد » ، من ١ – و إلى ١٢٨ – ظ حسب الترقيم القديم الذي اتبعه كراوسه ، أو من ١ – و إلى ١٣١ – و بالترقيم الذي استعمل فيما بعد . وقد كتب الناسخ في آخره ما نصه : « نجزت كتابته بتوفيق الله تعالى يوم الخميس أول نهاره منتصف رجب سنة ٧٣٦ الهلالية » .

- « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » : من ١٢٨ – ظ إلى ١٣٦ – وحسب الترقيم القديم ، أو من ١٣١ – ظ إلى ١٣٩ – و بالترقيم الأخير . وكتب الناسخ في آخر الرسالة : « فرغ من تحريره بحمد الله تعالى وحسن توفيقه العبد الضعيف الراجي إلى رحمة ربه اللطيف نوح بن علاء الدين الاتعاني يوم السبت وقت الضحى عشرين من شهر رجب سنة سبع وثلاثين وسبعمائة في المدرسة الصادقية ، رحم الله واقفها ، في محروسة بغداد ، حرسها الله من الآفات ، وصلى الله على نبيه محمد وآله أجمعين ». وبما أنه نفس الناسخ كما يشهد بذلك الخط ، فهذا يعني – لو كان كلا التاريخين صحيحاً – أنه انتظر سنة كاملة وعدة أيام حتى ينتهي من نسخ ثماني أوراق « التذكرة » . ويتم بهذا الكتاب . وهذا إن لم يكن مستحيلاً فهو غير معقول ، هذه واحدة . أما الأخرى فهي تناقض بين التواريخ . فالتاريخ الأول ، أعني يوم الخميس منتصف رجب ٧٣٦ ، غير صحيح لو اعتبرنا أن المقصود بمنتصف رجب هو الخامس عشر منه . فالخامس عشر من رجب سنة ٧٣٦ هو يوم الأربعاء لا الخميس الموافق للثامن والعشرين من شهر فبراير سنة ١٣٣٦ . ويستقيم الأمر إذا افترضنا أن التاريخ الأخير أي تاريخ الرسالة هو الصحيح ، وأن سهواً وقع عند كتابة التاريخ الأول بالأرقام .

1. Max Krause: Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker, in *Quellen und Studien Zur Geschichte der Math., Astro., und Phys. – Abt. B., Bd* 3, 1936, *H.* 4, S. 509.

ومما يحبذ هذا الرأي ، أن العشرين من رجب سنة ٧٣٧ هو حقاً يوم السبت الموافق للثاني والعشرين من فبراير سنة ١٣٣٧ ميلادية . وهكذا فنحن أقرب إلى الحقيقة إذا افترضنا أن الناسخ يعني « بمنتصف » التقدير لا التحديد ، ويكون قد انتهى من كتابة « أساس القواعد » يوم الخميس ١٣ فبراير سنة ١٣٣٧ ثم أتم « التذكرة » بعدها بتسعة أيام ؛ وفي كل الأحوال نستطيع أن نقطع أن رسالة الفارسي هذه قد نسخت بعد وفاة مؤلفها بحوالي ١٧ سنة على أكثر تقدير .

ونجد في نفس المخطوطة وبنفس الخط — في آخر أساس القواعد — مسألة ميراث قصيرة ؛ ثم نجد في آخرها بخط مختلف مسألتين لا علاقة لهما بما نحن فيه ، زادهما ناسخ آخر على ما بقي من صفحات فارغة ، وهي من ١٣٩ — ظ إلى ١٤٠ — ظ ، وبهذا تنتهي المخطوطة .

وأما مخطوطة « أساس القواعد » و « التذكرة » فهي بخط فارسي جميل ، والرسوم بحبر أحمر ، كذلك خطوط الجداول وأرقام الأشكال وبعض الكلمات في هذه الأخيرة . وطول الصفحة ٢٤ سنتيمتراً وعرضها ١٨ سنتيمتراً وتحتوي على ٢٥ سطراً ، وكل سطر منها على ١٦ كلمة تقريباً .

وفي هامش المخطوطة لَحَق بخط ناسخها ، استدراكاً لما سها عنه ، مع الاختصار المعروف « صح » ليبيّن أنه هو الذي استدرك ما نُسي . ولكن لايزال ينقص هذه المخطوطة بعض العبارات كما سيتبين ذلك بمقارنتها مع المخطوطات الأخرى .

وسنشير لهذه المخطوطة بحرف « ك » وسنأخذ بأرقام صفحاتها عند التحقيق .

ب — مخطوطة آستان قدس رضوى ٥٥٧٨ .

وهي تشتمل أيضاً على :

- « أساس القواعد في أصول الفوائد » ، من ١ — و إلى ١٢١ — و .
- « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » : من ١٢١ — ظ إلى ١٢٧ — ظ .

ولا يتم الناسخ « التذكرة » ، بل يتوقف قرب نهايتها ، فتنقصها فقرة أخيرة ؛ وهو لا ينسخ أيضاً بعض الجداول تاركاً فراغاً مكانها . وإن كان خطه فارسياً جميلاً إلا أنه يهمل ويتكاسل عند اقترابه من نهاية المخطوطة ، فتزيد أخطاؤه ، ويترك فقرة كما قلنا .

أما عن تاريخ النسخ ،فلقد وقع الفراغ من « أساس القواعد » كما يقول « وقت الظهر من غرة رجب المُرَجّب لسنة ثمان وأربعين وثمانمائة على يدي العبد الضعيف زين العابدين ابن علي بن محمد الحسني ، تاب الله عليه وأصلح شأنه وأحواله » أي سنة ١٤٤٤ ميلادية .

ولا ندري أين تمّ نسخ هذه المخطوطة ، إلا أن هناك على أولى صفحاتها عدة أختام، منها ختم سلطان الدين محمد بن قطب ، مما يرجح أنها ظلت في المنطقة الشرقية من العالم الإسلامي .

ورسوم المخطوطة وحروف البراهين بحبر أحمر ، وكل صفحة طولها ١٧,٧ سنتيمتراً وعرضها ١٣,٣ سنتيمتراً ، وتحتوي على ١٧ سطراً ، وكل سطر على ١٩ كلمة تقريباً . وعادة ما ينقص هذه المخطوطة أرقام الأشكال ، وهي أيضاً خالية من الهوامش ، أو من أي علامة تبين أن الناسخ عارض النص بالأصل .

وسنشير لهذه المخطوطة بحرف « م » .

ج – مخطوطة خدابخش ٢٠١٢ .

وهي أيضاً تشتمل على :

- « أساس القواعد في أصول الفوائد » ، من ١ – و إلى ٩٧ – ظ .
- « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » ، من ٩٨ – و إلى ١٠٢ ظ .

وينقص هذه المخطوطة جزء يتضمن آخر « أساس القواعد » وأول « التذكرة » ، مما يدل على سقوط بعض أوراقها . أما عن تاريخ النسخ ، فنقرأ في آخر « التذكرة » : « قد فرغت من انتساخ هذه النسخة الشريفة الميمونه ... في أواخر ذي الحجة أحد وتسعين وثمانمائة هجرية ، أنا عبد النبي (؟) بن محمد بن حسين البيرجندي ... » أي في أواخر سنة ١٤٨٦ ميلادية ؛ ولا ندري أين كان مكان نسخها .

والخط فارسي واضح،والرسوم وحروف البراهين وأرقام الأشكال وخطوط الجداول وأغلب العناوين بحبر أحمر . وطول كل صفحة ٢١ سنتيمتراً ، وعرضها ١٢ سنتيمتراً وتحتوي على ٢١ سطراً ، وكل سطر على ١٤ كلمة تقريباً .

وتدل هوامش المخطوطة على أن الناسخ قد عارضها بالأصل بعناية ؛ وكثيراً ما كان ينقل عبارة أوقليدس في الهامش حين يشير الفارسي إليها دون أن ينقل نصها .

وسنشير لهذه المخطوطة بحرف « خ » .

ج - مخطوطة الوزير الشهيد علي باسطمبول ١٩٧٢

وتشتمل هذه المخطوطة على :

- « أساس القواعد في أصول الفوائد » ، من ١ - و إلى ٢٦٨ - و .
- بداية « تذكرة الأحباب في بيان التحاب » ، من ٢٦٨ - ظ إلى ٢٧٠ - و .

فبعد أن يتم الناسخ « أساس القواعد » لا ينقل من « تذكرة الأحباب » إلا بدايتها . والمخطوطة بخط نسخي ، وحذفت منها الرسومات ، وكتبت الحروف المستعملة في البراهين بحبر أحمر . وطول الصفحة ١٣ سنتيمتراً وعرضها ١٢ سنتيمتراً وتحتوي على ٢١ سطراً وكل سطر على ١٠ كلمات تقريباً .

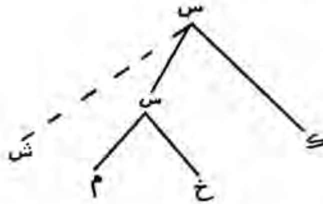
وليس في هوامش المخطوطة شيء بغير خط كاتبها وهي استدراكات في مواضع يسيرة لما سها عنه . ولا ندري من كان هذا الناسخ ولا مكان ولا زمان النسخ ؛ وإن اكتفينا بالتخمين ، فقد تكون من القرن التاسع أو العاشر الهجري .

وأشرنا إليها بحرف « ش » .

أما سيرتي في تحقيق النص ، فقد سلكت الطريق الذي سبق أن سلكته عند تحقيق « رسائل الخيام الجبرية » وذلك بالبدء بتصنيف المخطوطات . والمنهاج في هذا هو ما شرحناه هناك بإثبات كل الاختلافات بين المخطوطات وبيان ما ينقص من كل منها بمقارنته بالأخرى وكذلك أخطاء كل منها بالنسبة للأخرى . والطريق الذي وصفناه هناك يبين :

- أن مخطوطة « ك » ، وهي أقدم ما نمتلك ، ليست بأصل للمخطوطات الأخرى ، بل تنقصها عبارات هامة لسياق النص . فهذه المخطوطة تمثل تقليداً مخطوطياً مستقلاً .
- أن مخطوطة « م » أيضاً ليست بأصل لمخطوطة « ح » التي كتبت بعدها بحوالي نصف قرن .
- أن « م » و « خ » ينحدران من جد - أو أب - واحد .
- أن « م » ليست بأصل لـ « ش » .
- أن قصر الفقرة الباقية من « ش » وضياع هذه الفقرة من « خ » ، لا يسمح لنا بأي استنتاج عن علاقة الواحدة بالأخرى .

ونستطيع تمثيل هذا بالصورة التالية :



٢ ــ كتاب في علم الحساب (للتنوخي) . الڤاتيكان (٢) ٣١٧ ، من ٧٥ ظ إلى ٨٩ ظ .
هو زين الدين أبو عبد الله محمد بن محمد بن عمرو التَّنُوخي المعري ، ولا نعرف ترجمة له . ونعرف له غير كتابه هذا رسالة في حساب الخطأين سماها « كشف الغطاء في استنباط الصواب من الخطأ » ، وهي مخطوطة من نفس المجموعة (٣) ٣١٧ ، من ٩٠ ــ و إلى ٩٢ ــ و . وفي أول هذه الرسالة أضيف إلى اسمه لقب « الحاسب » ، ونقرأ في آخرها « نجز في العشرين من جمادي الأول سنة سبع وسبعمائة » . فالتنوخي هو إذاً حاسب على قيد الحياة في أوائل القرن الرابع عشر الميلادي ، فهل هو نفس التنوخي الذي ذكر له حاجي خليفة في « كشف الظنون » : « أقصى القرب في صناعة الأدب » ، فيكون بهذا أديباً وحاسباً . ومما يجعل هذا ممكنا ــ ولكن ليس بيقيني ــ تشابه الاسم . فلقد سماه حاجي خليفة « زين الدين أبا عبد الله محمد بن محمد التنوخي » وجعل وفاته سنة ٧٤٨ [1] .

والمخطوطة هي بخط نسخي قديم ، وطول الصفحة ١٩,٥ سنتيمتراً وعرضها ١٣,٥ سنتيمتراً ، وتحتوي على ٣١ سطراً ، وكل سطر على ١٩ كلمة تقريباً ، ولا ندري شيئاً عن مكان وتاريخ نسخ المجموعة التي تضم هاتين الرسالتين للتنوخي مع رسائل رياضية أخرى .

٣ ــ عيون الحساب (لليزدي) ١٩٩٣ E. Hazinesi باسطمبول

محمد باقر بن زين العابدين اليزدي من الرياضيين المتأخرين ، فلقد تُوفي سنة ١٦٣٧ ميلادية على وجه التقريب . أما عن « عيون الحساب » فهو أحد مراجع هؤلاء الأساسية .

١ ــ يذكره أيضاً اسماعيل البغدادي كما ذكره من قبل طاش كبري زاده ، ولكن لا نجد جديداً فيما قالوه . ولقد رجعنا إلى كتاب " الدرر الكامنة في أعيان المائة الثامنة " لابن حجر العسقلاني المتوفى سنة ٨٢٥ فلم نجد ترجمة له .

ولا غرابة أن نجد منه مخطوطات كثيرة لا بد من مقارنتها لنشره بصورة علمية . وإن كنا قد قمنا بهذا فيما يخص ما سبق من النصوص وكذلك ما سيأتي فيما بعد ، إلا أننا لا نزعم أننا نحقق هذا للفصل الذي اخترناه من كتاب اليزدي . فنحن لا نرتكز إلا على مخطوطة واحدة هي التي نهدف هنا لإخراجها بكل دقة وعناية .

ونقرأ في آخر هذه المخطوطة تاريخ الانتهاء من نسخها وهو « غرة رجب الفرد سنة إحدى وسبعين ومائة ألف ، وذلك على يد أضعف الضعفاء صدقي الحاج مصطفى ... » فالمخطوطة هي إذاً من القرن الثامن عشر ، ١٧٥٨ ميلادية على وجه التحديد . وهي من ١٢٠ ورقة . وثلاث ورقات غير مرقمات عليها بعض الجداول . والصفحة الأولى لا تضم إلا رسما للمثلث الحسابي ، والصفحة الثانية لم يكتب فيها إلا العنوان واسم المؤلف . أما الخط فنسخي أنيق . وطول الصفحة ١٧,٤ سنتيمتراً وعرضها ٧,٢ سنتيمترات وتحتوي على ٢٩ سطراً وكل سطر على ١٣ كلمة تقريباً .

٤ — رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب (ابن البناء)

لقد كتبه ابن البناء المراكشي سنة ٧٠١ هجرية ، أي سنة ١٣٠١ — ١٣٠٢ ميلادية لشرح كتابه « تلخيص أعمال الحساب » . واعتمدنا في تحقيق الفصل الذي اخترناه هنا على مخطوطتين :

أ — تونس (دار الكتب) ٩٧٢٢ ، من ١ — ظ إلى ٤٥ — ظ .

وخط هذه المخطوطة مغربي قديم ، ولكن لا نعرف مكان وزمان نسخها ولا هوية ناسخها ، وليس في هامشها شيء بغير خط كاتبها ، إلا في موضع واحد اشتبهنا فيه وهو في هامش ١٨ — ظ ، ولكن هناك في مواضع يسيرة جدا بعض استدراكات الناسخ لكلمات نسيها . وطول الصفحة ١٩,٧ سنتيمتراً وعرضها ١٥,٢ سنتيمتراً حسب ما تسمح بقياسه صورة المخطوطة لا المخطوطة نفسها . وتحتوي كل صفحة على ٢١ سطراً وكل سطر على ١١ كلمة تقريباً . والفصل الذي نحققه هنا هو من ١٥ — ظ إلى ١٧ — ظ وأشرنا لهذه المخطوطة بحرف « ت » .

ب — وهي ١٠٠٦ باسطمبول ، من ١٠ — ظ إلى ٤٢ — و

وخط هذه المخطوطة مشرقي ، وكاتبها هو كاتب مخطوطة عيون الحساب التي تكلمنا عليها ، أي الحاج مصطفى صدقي الذي يقول إنه كتبها لنفسه يوم « الأحد الثالث ،

والعشرين من شعبان المعظم لسنة ثلاث وخمسين ومائة ألف » . فهي إذاً من تقليد مخطوطي مختلف . ويؤكد هذا أيضاً مقارنة المخطوطين . وطول الصفحة ٢٤,٤ سنتيمتراً وعرضها ١٥,٢ سنتيمتراً وتحتوي على ٢٥ سطراً وكل سطر على ١٣ كلمة تقريباً . وقد أخذنا بأرقام صفحات هذه المخطوطة عند التحقيق . وأشرنا لهذه المخطوطة بحرف « و » .

٥ – **التمحيص في شرح التلخيص** (لابن هيدور) ٢٥٢ الحسنية بالرباط

شرح أبو الحسن علي بن عبد الله بن محمد بن هيدور التادلي ، المتوفى سنة ٨١٦ هـ – ١٤١٣ م – في كتابه هذا « تلخيص أعمال الحساب » لابن البناء المراكشي . والفصل الذي اخترناه هنا يبين ، على عكس ابن البناء نفسه ، اهتمام ابن هيدور بالبحث في الاعداد المتحابة. ولقد سبق أن وضعنا موضع الشك نسبة رسالة في الأعداد المتحابة – نسبها صديقنا الأستاذ محمد سويسي – لابن البناء ، واقترحنا حينئذ احتمال نسبتها لابن هيدور . ويرجح نص الفصل الذي نحققه هنا هذا الفرض . ومع هذا فلا يمكننا أن نقول بيقين إن الرسالة التي وعد بها في كتابه هي تلك الرسالة . فهو يعد بالبراهين التي لا نجد لها أثراً في الرسالة .

والمخطوطة التي اعتمدنا عليها لتحقيق هذا النص هي احدى مخطوطتين بالمكتبة الحسنية بالرباط ، فهي مخطوطة بخط مغربي في مجلدين . أما المخطوطة الأخرى فهي برقم ٣٤٣٥ . وهنا أيضاً نحن لا نزعم بأننا نحقق هذا الفصل ، فنحن لا نركز إلا على مخطوطة واحدة هادفين إلى إخراجها بكل دقة وعناية .

والتزمنا عند التحقيق بالقواعد المتعارف عليها بدقة بالغة . ولم نثبت الإعجام إن لم تكن هناك شبهة ، وأخذنا بالرموز التالية .

< ... > . نقترح إضافة ما بينهما .
[...] نقترح حذف ما بينهما .
/ انتهاء صفحة المخطوطة التي اختيرت لترقيم صفحات التحقيق .
ت تونس ٩٧٢٢
خ خدابخش ٢٠١٢
ش الشهيد علي ١٩٧٢
ك كوبرولو ٩٤١
م آستان قدس رضوى ٥٥٧٨

كمال الدين الفارسي
تذكرة الأحباب في بيان التحاب

١٣١ - ظ

بسم الله الرحمن الرحيم

وبه ثقتي وتوكلي

٥ الحمد لله الذي منه المبدأ وإليه المآب ، والصلاة على عبده ونبيّه محمد الداعي بفصل الخطاب ، الهادي إلى الرشاد والصواب ، صلاة دائمة إلى يوم الحساب ، وعلى آله وصحبه ما ذرّ شارق وغاب .

وبعد : فقد أشار إليّ مَنْ طاعته عليّ فرض محتوم ، ورضاه عني لي شرف مَرُوم ، أيدّه الله تعالى في استكماله وارتقائه ومتعنا منه بطول بقائه وطيب ١٠ لقائه ، في أثناء محاوراته اللطيفة ومباحثاته الشريفة ، تَبْيين الطريقة التي سلكها القدماء في استخراج الأعداد المتحابة بياناً عددياً شافياً ، وبرهاناً كافياً غير مفتقر إلى مقدمة لم تُذكرْ ومبدأ لم يحُرَّر ، اللهم إلا إلى بعض أشكال أُقليدس التي هي أصول الصناعة ؛ فطاوعت حكمه وامتثلت رسمه ، عارفاً بأني قصير الباع عن التصرف في المبادىء والمباني ، قليل الاطلاع على الحقائق والمعاني ؛ ١٥ فإن أصبت فمن ميَامين تلك الإشارة ، وإن طاشت سهام الأفكار فقد قدمت الاعتـــذار . والمأمول من مكارم الفضلاء الناظرين فيه أن يصلحوا ما فســـد وينظموا ما تبدّد من هذه المقالة ليكون سَعْيُهم مشكوراً وجزاؤهم موفوراً .

وها أنا أبتدىء بذكر الطريقة المشهورة في استخراجها ، ثم أشرع في الاستدلال عليها واستنتاجها . وقد انتظم في نيف وعشرين شكلاً ، مُصدَّرة

٤ – السطر ناقص في ک // ٥ – الذي : ناقصة – ش ، م – // ٨ – لي : له – ش – //
٩ – وارتقائه : وابقائه – ش / ومتعنا : ومنعنا – ش – // ١٠ – في اثناء : ناقصة – ک – //
١٢ – تذكر : مهملة – ک – يذكر – ش – / ومبدأ : ومبداه – ش – / إلا إلى : إلى إلى – ک –//
١٥ – ميامين : ميامن – ک، ش – ش، ک ، م – // ١٩ – انتظم : كذا ، والأفضل انتظمت //

بتعريفات خاصة لم أجد بُدّاً منها ولا ينفع الاكتفاء بالتصديرات التي في سائر الكتب الحسابية عنها ، ووسمتها « **بتذكرة الأحباب في بيان التحاب** » ، والله المستعان وعليه التكلان .

أما الطريقة فهي هذه :

٥ قالوا : إذا أردنا ذلك حصّلنا عدداً من تضاعيف الاثنين ، وزدنا عليه نصفه إلا واحداً ، ونسمي المبلغ الفرد الأول ، ونقصنا من ثلاثة أمثاله واحداً ، ونسمي الباقي الفرد الثاني ، ثم ضربنا أحد الفردين في الآخر ، فما حصل فنسميه الفرد الثالث ، ثم نجمع الأفراد الثلاثة ، ونسمي المبلغ الفرد الرابع . فإن كان كلٌّ من هذه الأفراد سوى الثالث أولَ ضربنا ذلك العدد — الذي من تضاعيف الاثنين — في الفرد الثالث والرابع ، فيكون الحاصلان عددين متحابّين ؛ فإن ١٠ لم تكن الأفراد — سوى الثالث — أوائل حصّلنا عدداً آخرَ من تضاعيف الاثنين تتولد منه الأفراد الأوائل ، ثم عَمِلنا عَمَلَنا ، فيُستخرج المتحابان .

وأما الأشكال فستجيء بعد صدرها ، وهو هذا :

صَدْر

١٥ كلُّ عدد تولد من ضرب عدد في آخر فإني أسميه مؤلفاً ثنائياً منهما ، وما تولد من ضرب عدد في عدد ثم في ثالث : ثلاثياً ؛ وما حصل من ضرب الثلاثي في رابع : رباعياً ؛ وعلى هذا .

وكلُّ مؤلف فإما أن تتساوى أضلاعه أو لا ، والأول أسميه المتساوية الأضلاع ، والثاني المتفاضلة الأضلاع ، وهو إما المتفاضلة جميع الأضلاع كالمؤلف ٢٠ من $\overline{ا}$ $\overline{ب}$ $\overline{ج}$ أو المتفاضلة بعض الأضلاع كالمؤلف $\overline{ا}$ $\overline{ب}$ $\overline{ب}$.

١ — خاصة : ناقصة — ك — / ينفع : ىتفع — م — مهملة — ك — / بالتصديرات : بالتصويرات — ش — / سائر : ناقصة — م ، ك — // ٨ — كان : ناقصة — ك — // ١٠ — متحابين : محابين — م — / فإن : وإن — ش — // ١٢ — الأوائل : ناقصة — م — أوائل — ك — // ١٣ — فستجيء : فسيجيء — ك — فجيء — ش — / بعد : ناقصة — ش — // ١٦ — ثم في : ناقصة — ش — // ١٨ — المتساوية : الصواب "المتساوي" وكذا ما بعده "المتفاضل" ، ونقتصر على هذه الإشارة . ويجوز أيضاً المتساوية أضلاعه // ١٩ — وهو ... الأضلاع : ناقصة — م — //

وكلُّ مركبين عدد أضلاع أحدهِما مثل عدد أضلاع الآخر ، فهما متماثلا الأضلاع وإلا فمتفاضلاها .

المركبان المتحدا الأضلاع هما اللـذان يكونان متساويي الأضـلاع ومتماثليها ، ويكون كل ضلع تكرر في أحدهما متكرراً بتلك العدة في الآخر .

٥ أجناس العدد هي مربعُه ومكعبُه ومالُ ماله وسائر المراتب الغـير المتناهية .

سلسلة كلِّ عدد هي الأعداد المتوالية التي أولها هو ، وثانيها مربعُه ، ثم مكعبه ، وسائر أجناسه المتوالية إلى غير النهاية . والعدد وأجناسه آحاد تلك السلسلة .

الأشـكال

١٠

آ

كلُّ مؤلف ، فإنه لابد وأن ينحلَّ إلى أضلاع أوائل متناهية ، هو متألف من ضرب بعضها في بعض .

فليكن آ مركباً ، فلأنه مركب فلا بد وأن يعدَّه أول بشكل لآ مـن مقالة زَ من الأصول . وليكن ذلك بَ ، وليعده بِ جَ . فإن كان جَ أول فقـد ١٥ تبين أنه / مؤلف من ضرب <بَ> الأول في جَ الأول . وإن كان مركباً فليعده ١٣٢-و أول وهو دَ بعدة هَ ، فإن كان هَ أول تبين أنه آ مؤلف من ضرب أعداد بَ دَ هَ

١ – مركبين : مركبين كل – ش – / عدد : عدد يوجد في – ش – / مثل عدد : يوجد في – ش – // ٣ – المتحدا : المتحد – ك ، ش – / متساويي : متساوى – ش – // ٤ – ومتماثليها : ومتماثليهما – ك ، م – ومتماثلاهما – ش – / أحدهما : أحديهما – ك ، م – / الآخر : الأخرى – ك – // ٥ – هي : وهي – ش – / مربعه ومكعبُه : مربعَه ومكعبَه – ك – / المراتب : ناقصة – ش – // ٨ – ثم مكعبه : ومكعبه – ك ، م – // ١٢ – لا بد وأن : الصواب حذف الواو بعد « لا بد » لأن المصدر المؤول من « أنْ » . وفعلها مجرور بـ « من » المقدّرة ، والأصل : لابد من انحلاله . وسيتكرر ذلك في النص ، ونقتصر هنا على هذه الإشارة . / هو : ناقصة – ك ، م – // ١٤ – مركبا : كتب ناسخ ك في الهامش بحذائها « صوابه مركب » / لآ : لطَ – ك ، م ، ش – // ١٥ – الأصول : المقصود أصول أوقليدس // ١٦ – أنه : المقصود آ // ١٧ – تبين : بين – ش – //

الأوائل بعضها في بعض . وإلا عملنا عَمَلَنا إلى أن ينحلّ الضلع المركّب آخرَ الأمر إلى ضلعين أولين ، فيكون آ مركباً من الأوائل السابقة مع ذينك الأولين .



وإن لم ينحلّ إلى ضلعين أولين أبداً ، لزِمَ تأليف المتناهي من ضرب أعداد غير متناهية ، بعضها في بعض ، وهو محال ؛ وذلك ما أردناه .

ب ٥

إذا كانت ثلاثة أعداد ، وليكن آ ب ج ، فإن نسبة الأول إلى الثالث مؤلفة من نسبته إلى الثاني ، ومن نسبة الثاني إلى الثالث .

فليكن مربع ب ه وسطحه في آ د وفي ج ز ، فلأن د مركب – ضلعاه آ ب – و ز مركب – ضلعاه ب ج – تكون نسبة د إلى ز مؤلفة من نسبتي آ إلى ب و ب إلى ج بشكل ه من مقالة ح ، ولأن ب ضُرب في نفسه وفي ١٠ آ فحصل ه د تكون نسبة آ إلى ب كنسبة د إلى ه بشكل يح من مقالة ز ، وكذلك نسبة ب إلى ج كنسبة ه إلى ز . فبالمساواة : نسبة آ إلى ج كنسبة د إلى ز المؤلفة من النسبتين ، وذلك ما أردناه .



١ – عملنا : ناقصة – ش – // ٤ – وذلك ما أردناه : ناقصة – ك ، م – // ٨ – وسطحه : أي سطح ب في ا . // ١٠ – من مقالة ح : المقصود من أصول أوقليدس ، ولن نشير إلى ذلك مرة أخرى إلا إذا غمض الأمر . // ١٢ – زَ : طَ – ش – //

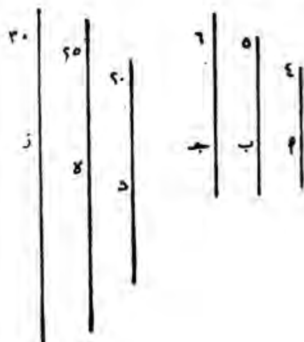
جـ

نسبة الواحد إلى كلٍ مركب مؤلفةٌ من نسبته ـ إلى كلَ من أضلاعه الأوائل .

فليكن المركب آ وأضلاعه الأوائل : أما أولاً فاثنين هما بَ جَ ، فنقول : لأن بَ ضرب في جَ فحصل آ تكون نسبة بَ الى آ كنسبة الواحد إلى جَ . ونسبة الواحد إلى آ متألفة من نسبتي الواحد إلى بَ و بَ إلى آ ؛ فنسبة الواحد إلى آ مؤلفة من نسبته إلى بَ وإلى جَ .

وليكن الأضلاع أكثر من اثنين وهي بَ جَ دَ ، والمؤلف من بَ في جَ هَ . فلأن آ مؤلف من هَ في دَ تكون نسبة الواحد إلى آ مؤلفة من نسبته إلى هَ و دَ . ونسبة الواحد إلى هَ مؤلفة من نسبته إلى ضلعيه ، أعني بَ جَ ، فنسبة الواحد إلى آ مؤلفة من نسبته إلى بَ و جَ و دَ . وبمثل ذلك نبين إن كانت الأضلاع أكثر من ثلاثة ؛ وذلك ما أردناه .





٢ – ه هنا تنتهي المخطوطة ش //

٦ – إلى ا : (الثانية) ناقصة – م – //

١١ – نجد بجوار هذا الشكل الرسمين التاليين في ك و م . ولم نحتفظ بالنسب نفسها في كل الأحوال ، التي لم يتقيد بها النساخ وأيضاً المؤلف في أغلب الظن حتى لا يشغل بعض الرسوم حيزاً كبيراً . ولن نشير إلى هذا مرة أخرى .

دَ

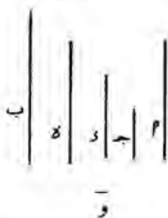
كلُّ مركبين متحدي الأضلاع فهما متماثلان .

كـ آ بَ المركب كل منهما من أضلاع جَ دَ هَ ، وذلك لأن نسبة الواحد
إلى كل منهما هي النسبة المؤلفة من نسبته إلى كلٍّ من جَ دَ هَ ، فنسبتا الواحد
إليهما متساويتان ، فهما متماثلتان ؛ وذلك ما أردناه . ٥

هَ

كلُّ مركبين متفاضلين فهما ليسا بمتحدي الأضلاع .

بل لا بد وأن تكون أضلاع أحدهما الأوائل مخالفة لأضلاع الآخر —
إما في بعضها ويكونان متفاضلي الأضلاع ، أو في عدّة تكرير بعضها ويكونان
متماثلي الأضلاع — وإلا فيكونان بمتحدي الأضلاع فيكونان متماثلين ، وقد ١٠
فرض التفاضل . هذا خلف ؛ وذلك ما أردناه .



وَ

كلُّ مركب حلّل إلى أضلاعه الأوائل فإن المؤلفة من تلك الأضلاع
الثنائية والثلاثية وغيرهما ، إلى المؤلفة السمّية لعدد الأضلاع إلا واحداً ، كلّها
أجزاء له . ١٥

فليكن المركب آ ولنحلّله إلى بَ جَ دَ هَ الأوائل، فأقول < إن > المؤلف
من بَ جَ يعدّ آ لأنه إذا ألف < مع > المؤلف من دَ هَ حصل آ ،فهو يعدّه .
وكذا سائر الثنائية والثلاثية . وليس المؤلف السميّ لعدد الأضلاع بجزء له ، إذ

١٠ – بمتحدي : متحدي – ک – // ١٥ – أجزاء : اجزآ – م – // ١٦ – ولنحلله: ولنحلل
– م – // ١٧ – من ب ... المؤلف من : كتبها ناسخ ک في الهامش //

هو ليس أقل منه [ولا المؤلف السميّ لعدد الأضلاع بجزء له إذ هو ليس أقل منه] ولا المؤلف السميّ لعدد أكثر من / الأضلاع ، إذ هو غير ممكن لعدم ١٣٢-ظ الضلع الزائد ، فثبت المطلوب ؛ وذلك ما أردناه .



إذا لم يعدّ عددٌ عدداً لم يعدّ مربعَه ، [ولا شيء من أجناسه] ولا شيء من أجناسه الأبعد ، سطحَه فيه ، ولا مكعبُه ولا أجناسُه الأبعدُ سطحَ مربعه < فيه > ،ولا مالُ ماله ولا أجناسُه الأبعدُ سطحَ مكعبه فيه ،وعلى هذا القياس .

فليكن آ غير عادّ لبَ ،وليكن جَ مربع آ و هَ مكعبه وحَ مال ماله ودَ سطح بَ في آ و زَ سطح بَ في جَ و طَ سطح بَ في هَ < فأقول إن جَ ولا شيء من أجناسه الأبعد يعد دَ ، ولا هَ ولا أجناسُه الأبعد يعدّ زَ ، ولا حَ ولا أجناسُه ١٠



١ – أقل (الثانية) : بجزء – م – //

الأبعد يعدّ طَ > ؛ وذلك لأن آ ضرب في نفسه وفي بَ فحصل جَ دَ ، فنسبة
جَ إلى دَ كنسبة آ إلى بَ بشكل يحَ من مقاله زَ من الأصول . و آ لا يعدّ بَ
فجَ لايعد دَ ، وكذا هَ و حَ وسائر الأجناس الأبعد ،لأن واحداً منها لو عدّ دَ
و زَ يعدّ ذلك الجنس، فجَ يعدّ دَ ؛هذا خلف . وكذا جَ ضرب في آ بَ فحصل
٥ هَ زَ ، فنسبة هَ إلى زَ كنسبة آ إلى بَ فهَ أيضاً لا يعدّ زَ ، وكذا حَ والأجناس
الأبعد . وبمثله نُبيِّن أن حَ والأجناس الأبعد لم يعد طَ ؛ وذلك ما أردناه .

حَ

إذا حلّل مركب إلى أضلاعه الأوائل ، ولم يتكرر عدد منها لم يعده مربع
ذلك العدد ولا واحدٌ من أجناسه ، وإن تكرر مرةً فقط عدّة من أجناسه
١٠ مربعه فقط دون البواقي ، وكذا إن تكرر مرتين فقط عدّه منها مربعه ومكعبه
دون البواقي ؛ وعلى هذا :

فليكن المركب آ وقد حلّل < إلى > أضلاعه الأوائل وهي بَ جَ دَ ،
فأقول إن بَ مثلاً لمّا لم يتكرر فيها لم يعدّه مربعه ، وذلك لأن بَ يباين جَ و دَ
فيباين سطح جَ في دَ أيضاً بشكل كدَ من مقالة زَ . و بَ قد ضرب في نفسه
١٥ وفي سطح جَ في دَ فحصل مربعه و آ ، فالمربع لم يعدّ آ بشكل كهَ من مقالة زَ ،
وبطريق الأَوْلَى ألا يعدّ آ سائرُ أجناسه .

وأيضاً : ليتكرر بَ فيها مرة فقط ، وليكن الأضلاع بَ بَ جَ دَ . فظاهر



٤ – زَ : جَ – ك ، م – // ٨ – إلى : من – ك ، م – / لم : فلم – ك ، م – //
١٣ – يتكرر : يكرر – ك – / يباين : مهملة – ك ، م – // ١٤ – قد : ناقصة – م – //
١٦ – ألا : أن لا – ك ، م – هكذا كتبت في كل النص ولا نشير إليها مرة ثانية . //

أن مربعه الذي هو أحد ثُنَـاها يعده . أقول : لكن لا يعدّه مكعبه ، لأن بَ لم يعدّ سطح جَ في دَ كما مرّ ، وقد ضرب مربعه فيهما فحصل مكعبه و آ على نسبتهما فالمكعب لا يعدّ آ ، والأجناس الأبعد أوْلى بألا تعدّه .

ولو كان التكرار مرتين ، كما لو كانت بَ بَ بَ جَ دَ ، عدّ آ مربع بَ ومكعبه دون البواقي ، لأن بَ لم يعدّ سطح جَ في دَ وضرب فيهما مكعبه ، فحصل مال ماله و آ على تلك النسبة ، فمال ماله لم يعد آ ، وكذا سائر أجناسه الأبعد ؛ وذلك ما أردناه .

ط

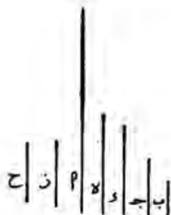
كلُّ مركب حلّل إلى أضلاعه الأوائل فإنه لا يوجد له جزء سوى الواحد وأضلاعه الأوائل والمؤلفة من أضلاعه الثنائية أيضاً إن كانت أكثر من اثنين ، والثلاثية أيضاً .. إن كانت أكثر من ثلاثة وهلم جرّا ، إلى أن ننتهي إلى المؤلفة السميّة لعدد الأضلاع إلا واحداً .

فليكن آ مركباً ولنحلله إلى أضلاعه الأوائل وهي بَ جَ دَ هَ ، فأقول : ليس له جزء سوى الواحد ، و بَ جَ دَ هَ ، والمؤلفة من بجَ بدَ بهَ جدَ جهَ دهَ الثنائية ، والمؤلفة من بجدَ بجهَ بدهَ جدهَ الثلاثية ، وهي السميّة لعدد الأضلاع إلا واحداً .

وذلك لأنه لو أمكن أن يكون له جزء غير ما ذكر فليكن زَ ، وهو إما

١ — هو : كررت فوق ا — م — / أحد ثناها : واحد ثناتها — ك — كتب الناسخ بعدها " ثنهاتها " ثم كتب فوق " تها " : " سا " . // ٣ — تعده : تعد — ك ، م — // ١١ — المؤلفة : المؤلف — ك ، م — // ١٣ — ولنحلله : ولنحلل — ك ، م — // ١٤ — له : لا — م — //

أول / أو مركب . فإن كان أول ويعد ا المؤلف من ب ج د في ه فلا بد وأن ١٣٣-و
يعد أحد ضلعيه بشكل ل من مقالة ز ،ولا يمكن أن يعد ه الأول ،فلزم أن يعد
المؤلف من ب ج د . ولأنه يعد هذا المؤلف، وهو مؤلف من المؤلف من ب ج
في د الأول ، فبالبيان المذكور يلزم أن يعد المؤلف من ب ج ، ولأنه يعد هذا
٥ المؤلف فيعد أحد ضلعيه الأولين أو يكون أحدهما ، وكلاهما محال . وإن كان
ز مركباً ، وهو مفاضل للمؤلفة المذكورة ، فلا بد وألا يكون أضلاعه الأوائل
متحدة بأضلاع من تلك المؤلفة . فإما أن يوجد في أضلاع ز الأوائل ما لم يوجد
في أضلاع ا أو لا . فإن لم يوجد فإما أن يكون ضلع من أضلاع ز فيها بعدة
لم يتكرر بمثلها في أضلاع ا ، أو يتكرر ضلع من أضلاع ا فيها بعدة لم يتكرر
١٠ بمثلها في أضلاع ز . وهذه ثلاثة أقسام .



فإن كان الأول ، فليكن ذلك الأول المفاضل لجميع أضلاع ا ح . فح
أول ويلزم الخلف المذكور إذ فرض ز أول .

وإن كان الثاني – وهو أن يكون ضلع من أضلاع ز ، وليكن ب –
مكرراً ، وليكن مرة ، ولا يكون ب مكرراً في أضلاع ا . فالمؤلف من ب
١٥ في مثله يعد ز ، وهو يعد ا وهو غير مكرر في أضلاع ا ، هذا محال .

وبمثـــل ذلك نبين الخلف لو كان مكرراً مرتين أو أكثر . وليكن ب
مكرراً في أضلاع ز مرتين وفي أضلاع ا مرة ، فيلزم أن يعد ز <مكعب ب>
فمكعب ب يعد ا ، وهو لم يتكرر في أضلاعه أكثر من مرة ، هذا خلف .

وبمثل ذلك تبين الخلف كلما كان عدة تكرر ب في أضلاع ز أكثر من

٢ – ل : لب – ك ، م – / يعد ه : يعده – ك ، م – //

عدته في أضلاع آ . وإن كان الثالث ، أعني أن تكون بعض أضلاع آ مكرراً فيها بعدة لم يتكرر بمثلها في أضلاع زَ ، فبيّنٌ أن زَ حينئذ يكون أحد أجزاء < آ > المؤلفة . فالحكم ثابت ؛ وذلك ما أردناه .

ي

كل زوج فهو مركب ، إلا اثنين .

لأنه يعده نصفه ، والاثنين أيضاً .

يا

كلُ فرد فهو إما فرد من الآحاد ، أو مركب أحد مفرداته < فرد > من الآحاد .

لأن العدد إما أن يكون من الآحاد أو لا ، والثاني إما أن يكون مفرداً أو لا ، والثاني إما أن يكون مركباً أحد مفرداته < فرداً > من الآحاد أو لا شيء من مفرادته < فرد > من الآحاد . فإن لم يكن الفرد من القسم الأول < ولا > من الثالث ، فإما أن يكون من الثاني أو < من > الرابع . فإن كان مفرداً من غير مرتبة الآحاد فهو زوج ، إذ العشرة التي هي زوج تعد كل مفرد من غير مرتبة الآحاد ، وإن كان مجتمعاً من تلك الأعداد المفردة ، فيكون زوجا أيضاً بشكل كا من مقالة طَ ، وكلاهما خلف ؛ وذلك ما أردناه .

يب

الخمسة تعد كلً مركبٍ أحد مفرداته خمسة .

لأنها تعد كل مفرد ليس من الآحاد ، فتعد نصفه الذي هو جميع تلك المفردات وتبقى خمسة ، فتعدها أيضاً ، فعدً ذلك المركب .

٨ – فهو : في الهامش – ک – / من الآحاد : أي من مرتبة الآحاد . // ١٠ – والثاني : أي العدد الذي من غير مرتبه الآحاد . // ١١ – والثاني : أي هذا الأخير . // ١٢ – القسم الأول : أي مفرد من مرتبة الآحاد . // ١٢، ١٣ – من الثالث : ا م الثالث – م – أي مركب أحد مفرداته فرد من الآحاد . // ١٣ – أو : ا م – م – // ١٤ ، ١٥ – فهو زوج ... مرتبة الآحاد : ناقصة – م – // ١٤ – تعد : يعد – ک – // ١٨ – كل : ناقصة – م – // ١٩ – فتعد نصفه : فيعد نصفه – ک – // ٢٠ – فتعدها : فيعدها – ک – //

يج

كل عدد يعده الخمسة فهو إما خمسة ، أو مفرد ليس من الآحاد ، أو مركب منها فقط ، أو مركب من مفردات أحدها من الآحاد وهو خمسة .

إذ لو عدت غيرها فإما مفرداً من الآحاد غير الخمسة وهو محال ، أو
٥ مركباً من مفردات أحدها من الآحاد وهو غير الخمسة ، فيعد الخمسة ذلك العدد وتعد جميع مفرداته سوى ذلك المفرد من الآحاد ، فتعد ذلك المفرد الباقي ، وهو محال ؛ وذلك ما أردناه .

يد

أقل عدد <مركب> يعدّه أحد أعداد مفروضة متفاضلة كأعداد آ بَ
١٠ جَ هو مربع العدد الأقل .

وليكن آ أقلها ثم بَ . ولأن معدوداتها إما أن تكون آحاد سلسلة كلٍّ
منها أو مؤلفات بعضها مع بعض ؛ ولأن المؤلف بنفسه / أقل من المؤلف مما ١٣٣-ظ
هو أعظم ، وأقل أفراد السلسلة مربعة ، وأقل المربعات مربع آ ، فمربع آ أقل <من> مؤلفه بالباقيين وأقل من سائر آحاد سلسلته ومن جميع آحاد
١٥ سلسلتي الباقيين ، فهو أقل من كل عدد يعده أحد الثلاثة ؛ وذلك ما أردناه .

أ | ب | جـ

وقد استبان من ذلك أن أقل عدد أصم مركب هو مربع أحد عشر ؛ أعني مائة وأحداً وعشرين ، لأن أقل الأعداد الصم أحد عشر .

٢ – أحدها : بعضها – ک ، م – // ٣ – فإما : إما – ک ، م / غير : عن – ک ، م – //
٥ – أحدها : بعضها – ک ، م – // ٩ – يعده : تعده – ک – // ١١ – ولأن : لأن
– ک ، م – / تكون : يكون – ک – // ١٤ – سلسلته : سلسله – ک ، م // ١٦ – أصم :
المقصود بالعدد الأصم هنا كل عدد أول من مرتبة العشرات على الأقل . //

يه

نريد أن نتعرّف أن عددا ما – وليكن آ – هو أول أو مركب ، وإن كان مركبا فكيف يحُلل إلى أضلاعه الأوائل ؟

فينظر : فإن كان زوجاً غير الاثنين فهو ليس بأول ، وإن كان فرداً فهو إما مفرد من الآحاد أو مركب أحد مفرداته من الآحاد . فإن كان مفرداً من الآحاد فهو أول غير التسعة ، وإن كان مركباً وأحد مفرداته من الآحاد ، فذلك المفرد إن كان خمسة فهو ليس بأول وإن كان واحداً أو ثلاثة أو سبعة أو تسعة أمكن أن يكون أول . فإن عده الثلاثة أو السبعة فهو ليس بأصم وإلا فهو أصم لكون الأزواج من الآحاد غير عادّة له – وإلّا لكان زوجا بشكل كآ من مقالة طآ – وهو فرد – والثلاثة والخمسة والسبعة من الأفراد غيرُ عادّة له أيضاً وكذا التسعة – < وإلا > لعدته الثلاثة < التي > تعد العادّ – .

وما لم يعده المخارج التسعة فهو أصم ، فإن كان أقل من مائة وأحد وعشرين فهو أول ، لأنه لم يعده شيء من الأعداد المنطقة و < لا > الصم ولا المشتركة < منهما > وإلا لعده الأُولَيان . وإن كان أكثر فنقسمه على مربع الأحد عشر ، فإن انقسم أو بقي < بقية > تعدها الأحد عشر فهو ليس بأول لأن الأحد عشر تعده ، وإلا فنقسمه على مربع العدد الثاني من الأعداد الصم وهو ثلاثة عشر ، فإن انقسم أو عد الثلاثة عشر البقية فليس بأول ، وإلا فنقسمه على مربع الثالث من الصم وكذا الرابع والخامس على الولاء إلى ألّا يبقى أصم يمكن أن يقسم على مربعه . فإن لم يعده واحد من هذه الأعداد الصم أيضاً فهو أول ، لأن آ حينئذ لا يعده شيء من الأعداد المنطقة < والصمّ > والمشتركة وإلا لعده أحد المخارج هذا خلف ؛ ولا واحد من الأوائل الصمّ ، الذي يمكن أن يلقي مربعه منه – وقد تبيّن – ولا واحد من الأعداد الصمّ الأعظم منها – إذ لو عد آ بعضٌ منها لعده

١ – عددا : اعدادا – ک ، م – // ٣ – فهو : وهو – ک ، م – // ٦ – وإن كان ... من الآحاد : بعد أن كتبها ناسخ م أعادها كذلك "فذلك المفرد إن كان مركبا وأحد مفرداته من الآحاد" . // ١١ – العاد : في هامش – ک – // ١٣ – الصم : الأصمة – ک ، م – // ١٩ – يعده : كرر ناسخ م الهاء . // ٢١ – الذي : التي – ک ، م – //

بأقل من نفسه فيكون بأخذ الثلاثة المذكورة ، فيكون الأقل عاداً أيضاً ، هذا خلف .

واعلم أنه لا حاجة في القسمة على مربعات الصم إلى القسمة على مربعات أعداد صم مركبة ، إذ العلم بأن أضلاعه غيرُ عادّة له يفيدك أن السطح غير ٥ عادٍ ، وإلا لعده أضلاعه – هذا خلف .

وأما طريق استخراج الأضلاع الأوائل إذا كان مركبا فهو أن نقسمه على عددٍ ينقسم عليه ، فإن كان المقسوم عليه والخارج أوّلين فهما المطلوب ، وإن كانَ أحدهما أو كل منهما مركبا نعمل به ما عملنا بالعدد أوّلاً إلى أن ننتهي إلى قسمة يكون الخارج والمقسوم عليه أولين ، فيكون مركبا من الأعداد ١٠ الأوائل الواقعة في قسمةٍ قسمةٍ ويحصل المطلوب ؛ وذلك ما أردناه .

< يو >

صدر : إذا جُمعت الأعداد من الواحد على النظم الطبيعي إلى واحد واحد من الأعداد المتوالية حصلت أعداد متوالية أولها < ثلاثة وثانيها ستة وثالثها عشرة إلى غير النهاية ، ولنسمها المجتمعات الأولى ؛ وإذا جمعت الأعداد من ١٥ الواحد إلى واحد واحد من المجتمعات الأولى حصلت أعداد متوالية أولها > أربعة وثانيها عشرة ثم عشرون وخمسة وثلاثون إلى غير النهاية ، ولنسمها المجتمعات الثانية ؛ وإذا جمعت من الواحد إلى واحد واحد من المجتمعات الثانية حصلت أفراد المجتمعات الثالثة متوالية ؛ وقس عليها المجتمعات الرابعة والخامسة إلى غير النهاية .

٢٠ وقد وضعنا جدولا أثبتنا فيه عشرة من أنواع المجتمعات ومن كلٍّ عشرة من / أعدادها ليسهل إصابتها على الطلاب وليكون مثالاً لمن أراد استخراج ١٣٤-و غيرها منها ، وهذا هو الجدول .

٧ – فهما : فها – م – // ٨ – نعمل : يعمل – ك – // ١٢ – صدر : ناقصة – م – // ١٤ – وإذا : إذا – ك ، م – // ٢٠ – فيه : فيها – ك ، م – وهو أيضاً صحيح إلا أنه أخذ بصيغة المذكر فيما بعد . //

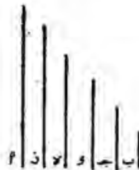
المجمعات / أعدادها		الأولى ٢	الثانية ٣	الثالثة ٤	الرابعة ٥	الخامسة ٦	السادسة ٧	السابعة ٨	الثامنة ٩	التاسعة ١٠	العاشرة ١١
الأولى	١	٣	٦	١٠	١٥	٢١	٢٨	٣٦	٤٥	٥٥	٦٦
الثانية	١	٤	١٠	٢٠	٣٥	+ ٥٦	٨٤	١٢٠	١٦٥	٢٢٠	٢٨٦
الثالثة	١	٥	١٥	٣٥	٧٠	١٢٦	٢١٠	٣٣٠	٤٩٥	٧١٥	١٠٠١
الرابعة	١	٦	٢١	٥٦	١٢٦	٢٥٢	٤٦٢	٧٩٢	١٢٨٧	٢٠٠٢	٣٠٠٣
الخامسة	١	٧	٢٨	٨٤	٢١٠	٤٦٢	ه ٩٢٤	١٧١٦	٣٠٠٣	٥٠٠٥	٨٠٠٨
السادسة	١	٨	٣٦	١٢٠	٣٣٠	٧٩٢	١٧١٦	٣٤٣٢	٦٤٣٥	١١٤٤٠	١٩٤٤٨
السابعة	١	٩	٤٥	١٦٥	٤٩٥	١٢٨٧	٣٠٠٣	٦٤٣٥	١٢٨٧٠	٢٤٣١٠	٤٣٧٥٨
الثامنة	١	١٠	٥٥	٢٢٠	٧١٥	+ ٢٠٠٢	٥٠٠٥	١١٤٤٠	٢٤٣١٠	٤٨٦٢٠	ه ٩٢٣٧٨
التاسعة	١	١١	٦٦	٢٨٦	١٠٠١	٣٠٠٣	٨٠٠٨	١٩٤٤٨	ه + ٤٣٧٥٨	٩٢٣٧٨	١٨٤٧٥٦
العاشرة	١	١٢	٧٨	٣٦٤	١٣٦٥	٤٣٦٨	١٢٣٧٦	٣١٨٢٤	٧٥٥٨٢	١٦٧٩٦٠	٣٥٢٧١٦

في الجدول : كتب بدل " الأولى ، الثانية ... الخ " في السطر الأول : الأول ، الثاني ... الخ
هناك ثلاثة أخطاء في الجدول في " م " وهي من أخطاء الناسخ لأن الرقم الذي يتبع ما يتضمن الخطأ فهو صحيح ، ولقد أشرنا إليها بـ ه ، وهي على التوالي : ٢٩٤ ، ٤٢٧٥٨ ، ٩٢٣٧٩ . و كذلك هناك ثلاثة أخطاء من الناسخ في " ك " ، وأشرنا إليها بـ + ، وهي على التوالي : ٣٥ ، ٢٠٠٥ ، ٤٢٧٥٩ .

< يز >

نريد أن نستخرج أجزاء عدد مركب بحيث لا يشذ منها شيء .

وليكن آ ، فنحلله إلى أضلاعه الأوائل ، وهي إما أن تكون متساوية أو متفاضلة ، جميعها أو بعضها ، فإن كانت متساوية جميعُها فالمركبُ أحدُ أجناس ضلْعِه في المرتبة السمية لعدد الأضلاع ، على أن أول المراتب هــو الضلع ، ٥
وأجزاؤه هي ما دونه من الواحد واحد < من > أضلاعه والأجناس ، وليس له جزء ســـواها بشكل يج من مقالة ط . وإن كانت متفاضلة جميعها ، فليكن ب ج د ه ، فنضرب ب في ج وفي د وفي ه و ج في د <وفي ه > و د في ه فيحصل المؤلفة الثنائية الست ؛ ثم ليُلق كلٌ واحد منها ونؤلف الثلاثة الباقية فيحصل المؤلفة الثلاثية الأربع ، وبهذا تنتهي الأجزاء المؤلفة فيكون جميع الأجزاء ١٠
بحيث لا يشذ منها شيء : الواحد والأضلاع الأوائل وهذه المؤلفة لا غير .



والطريق في استعلام الأجزاء الثنائية أو الثلاثية أو غيرهما عن أي عدة من الأضلاع كانت ، إذا كانت أوائل ومتفاضلة جميعُها ، هو أن يطلب في سلسلة المجتمعات السمية لعدد التأليف إلا واحداً ، العددُ الذي مرتبته ــ أعني أول أعدادها ــ سميةٌ لعدد الأضلاع إلا أعداد التأليف ، فهو عدد تلك المؤلفة . ١٥

برهانه : فليكن الأضلاع آ ب ج د ه ، فالثنائية منها لا تخلو إما أن يوجد في أضلاعها ه أو لا ، والثاني إما أن يوجد فيها د أو لا ، والثاني لا يخلو إما أن يُعدم فيها آ أو ب أو ج ، فالمؤلف الثنائي من ثلاثة ثلاثةٌ وهي في المرتبة السمية

٣ – فنحلله : منحلله – ك – منحله – م – / تكون : يكون – ك ، م – // ٥ – الأضلاع : المقصود المركب هو جنس لضلعه وهو في المرتبة السمية لعدد الأضلاع . // ٦ – وأجزاؤه : أي أجزاء المركب . // ١٤ – أعني : عن – ك، م // ١٥ – إلا أعداد : الا عداد – ك، م – //

لعـــدد الأضلاع إلا أعـــداد التأليف – أعني اثنين – وهي المرتبة الأولى من المجتمعات السمية لعدد التأليف إلا واحداً / ، أيْ الأولى ؛ والتي يوجد فيها [١٣٤-ظ] د من غير ه فيكون الضلع الآخر منها أحد آ ب ج الثلاثة الباقية ، فهي ثلاثة أيضاً ؛ فالمؤلفة الثنائية < من آ ب ج د > ستة . على القاعدة المذكورة ؛ والتي يوجد فيها ه فيكون الضلع التالي أحد آ ب ج د الأربعة الباقية ، فهي أيضاً أربع ؛ فالمؤلفة < الثنائية > من هذه الخمسةِ عشرٌ وهي من المجتمعات الأول في المرتبة الثالثة ، وهي سمية لعدد الأضلاع إلا أعداد التأليف .

وليكن الأضلاع آ ب ج د ه ز فالثلاثية منها لا تخلو إما أن يكون أحد أضلاعها ز أو لا ، والثاني إما أن يكون أحـــدها ه أو لا ، والثاني – أعني التي تكون مؤلفة من آ ب ج د الأربعة فقط – فلا بد وألا يوجد منها واحد فقط من الأربعة ، فهي أربعة ، أي الأول من المجتمعة الثانية ، والتي يوجد فيها ه من غير ز فيكون الضلعان الباقيان من كلٍّ منها ضلعي أحد المؤلفة الثنائية من الأضلاع الباقية – أعني آ ب ج د – وهي ست ، فهذه أيضاً ست . فالثلاثية من آ ب ج د ه [ز] الخمسِ عشرٌ ، والتي يوجد فيها ز فضلعا كلٍّ منها الباقيان ضلعا أحد من المؤلفة الثنائية من آ ب ج د ه الخمس الباقية وهي عشر ، فهي الثلاثية أيضاً <وهي> عشر . فالثلاثية من آ ب ج د ه ز عشرون وهي من المجتمعات الثانية – التي هي سمية لعدد التأليف إلا واحداً – في المرتبة الثالثة التي < هي > سمية لعدد الأضلاع إلا أعـــداد التأليف . وإن كانت الأضلاع متفاضلةً ، بعضُها ، ومتساويةً ، بعضُها ، فنستخرج المؤلفة على القانون المذكور ثم نلقي المكررة وتكون الباقية سائر الأجزاء ؛ وذلك ما أردناه .

وقد وضعنا بعض المؤلفات مع أجزائها ، وأمثلتَها في هذه الجداول ليؤخذ منها ما يوجد فيها ويكون أمثلة لما عداها / . [١٣٥-و]

١ – إلا أعداد: الاعداد – ك ، م – // ٣ – فهي : وهي – م – // ٤ – ستة : تأنيث العدد هنا جائز ، وهو يأخذ بالقاعدتين معاً كما سنرى ، ولهذا سنترك النص كما هو . // ٥ – التالي : الثاني – ك – / فهي: وهي – م – // ٧ – إلا أعداد: الاعداد – ك ، م // ٨ – يكون: ناقصة – م – // ١٤ – الخمسِ : الخمسة – م – // ١٧ – الثانية : الثنائية – ك ، م – // ١٨ – إلا أعداد : الاعداد – ك ، م – // ٢١ – الجداول : لم ينقل ناسخ م هذه الجداول وترك فراغاً صغيراً . وستبدأ مخطوطة خ من منتصف هذه الجداول كما سنشير لهذا . وفي هذا الجداول الكثير من أخطاء النسخ كما هو الحال في مثل هذه الجداول ، ولقد صححنا هذه الأخطاء .

المؤلف الثنائي		
الأضلاع المؤلفة	عدد الأجزاء	الأمثلة
اا	٢	٤
اب	٣	٦
الثلاثي		
ااا	٣	٨
ااب	٥	١٢
اب ج	٧	٣٠
الرباعي		
اااا	٤	١٦
اااب	٧	٢٤
اابب	٨	٣٦
ااب ج	١١	٦٠
اب ج د	١٥	٢١٠
الخماسي		
ااااا	٥	٣٢
ااااب	٩	٤٨
ااابب	١١	٧٢
اااب ج	١٥	١٢٠
ااب ب ج	١٧	١٨٠
ااب ج د	٢٣	٤٢٠
اب ج د ه	٣١	٢٣١٠

<المؤلف> السداسي		
الأضلاع المؤلفة	عدد الأجزاء	الأمثلة
اااااا	٦	٦٤
ااااا ب	١١	٩٦
اااا ب ب	١٤	١٤٤
اااا ب ج	١٩	٢٤٠
ااا ب ب ب	١٥	٢١٦
ااا ب ب ج	٢٣	٣٦٠
ااا ب ج د	٣١	٨٤٠
اا ب ب ج ج	٢٦	٩٠٠
اا ب ب ج د	٣٥	١٢٦٠
اا ب ج د ه	٤٧	٤٦٢٠
ا ب ج د ه و	٦٣	٣٠٠٣٠
السباعي		
ااااااا	٧	١٢٨
اااااا ب	١٣	١٩٢
ااااا ب ب	١٧	٢٨٨
ااااا ب ج	٢٣	٤٨٠
اااا ب ب ب	١٩	٤٣٢
اااا ب ب ج	٢٩	٧٢٠
اااا ب ج د	٣٩	١٦٨٠
ااا ب ب ب ج	٣١	١٠٨٠
ااا ب ب ج ج	٣٥	١٨٠٠
ااا ب ب ج د	٤٧	٢٥٢٠
ااا ب ج د ه	٦٣	٩٢٤٠
اا ب ب ج ج د	٥٣	٦٣٠٠
اا ب ب ج د ه	٧١	١٣٨٦٠
اا ب ج د ه و	٩٥	٦٠٠٦٠
ا ب ج د ه و ز	١٢٧	٥١٠٥١٠

المؤلف الثماني		
الأضلاع المؤلفة	<عدد> الأجزاء	الأمثلة
اااااااا	٨	٢٥٦
ااااااا ب	١٥	٣٨٤
اااااا ب ب	٢٠	٥٧٦
اااااا ب ج	٢٧	٩٦٠
ااااا ب ب ب	٢٣	٨٦٤
ااااا ب ب ج	٣٥	١٤٤٠
ااااا ب ج د	٤٧	٣٣٦٠
اااا ب ب ب ب	٢٤	١٢٩٦
اااا ب ب ب ج	٣٩	٢١٦٠
اااا ب ب ج ج	٤٤	٣٦٠٠
اااا ب ب ج د	٥٩	٥٢٠٠
اااا ب ج د ه	٧٩	١٨٤٨٠
ااا ب ب ب ج ج	٤٧	٥٤٠٠
ااا ب ب ب ج د	٦٣	٧٥٦٠
ااا ب ب ج ج د	٧١	١٢٦٠٠
ااا ب ب ج د ه	٩٥	٢٧٧٢٠
ااا ب ج د ه و	١٢٧	١٢٠١٢٠
اا ب ب ج ج د د	٨٠	٤٤١٠٠
اا ب ب ج ج د ه	١٠٧	٦٩٣٠٠
اا ب ب ج د ه و	١٤٣	١٨٠١٨٠
اا ب ج د ه و ز	١٩١	١٠٢١٠٢٠
ا ب ج د ه و ز ح	٢٥٥	٩٦٩٩٦٩٠

ترك ناسخ « م » فراغاً لهذه الجداول ولم ينقلها من الأصل ، ووقع ناسخ « ك » وكذلك ناسخ « خ » — في الجزء الموجود من هذه النسخة — في أخطاء عديدة . وأهمية هذه الأخطاء هي عند مقارنة المخطوطتين فقط ، وهذا ما قمنا به . وصححناها هنا دون الإشارة لصعوبة ذلك ؛ فإثباتها في أسفل النص المحقق لا يمكن إلا بإعادة الجداول عدة مرات ؛ والنتيجة المترقبة لا تستحق هذا العناء ولا هذه التكلفة :

١٣٥-ظ

١٤

المؤلف التساعي			<الأضلاع المؤلفة>	<عدد الأجزاء>	< الأمثلة >
الأضلاع المؤلفة	<عدد> الأجزاء	الأمثلة	ااببججدوه	٢١٥	<٩٠٠٩٠٠>
ااااااااا	٩	٥١٢	ااببجدهوز	٢٨٧	<٢٨٦٨٥٨٠>
اااااااب	١٧	٧٦٨	اابجدهوزح	٣٨٣	<١٩٣٩٩٣٨٠>
ااااااابب	٢٣	١١٥٢	ابجدهوزحط	٥١١	<٣٢٢٢٣٢٤٦٦١٥>
ااااااابج	٣١	١٩٢٠	/ المؤلف العشاري		
ااااااببب	٢٧	١٧٢٨	الأضلاع المؤلفة	<عدد> الأجزاء	الأمثلة
ااااااببج	٤١	٢٨٨٠	اااااااااا	١٠	<١٠٢٤>
اااااابجد	٥٥	٦٧٢٠	اااااااااب	١٩	<١٥٣٦>
ااااابببب	٢٩	٢٥٩٢	ااااااااابب	٢٦	<٢٣٠٤>
ااااابببج	٤٧	٤٣٢٠	ااااااااابج	٣٥	<٣٨٤٠>
اااااببجج	٥٣	٧٢٠٠	اااااااببب	٣١	<٣٤٥٦>
اااااببجد	٧١	١٠٠٨٠	اااااااببج	٤٧	<٥٧٦٠>
ااااابجده	٩٥	٣٦٩٦٠	اااااااابجد	٦٣	<١٣٤٤٠>
ااااببببج	٤٩	٦٤٨٠	اااااابببب	٣٤	<٥١٨٤>
اااابببجج	٥٩	١٠٨٠٠	اااااابببج	٥٥	<٨٦٤٠>
اااابببجد	٧٩	<١٥١٢٠>	اااااببجج	٦٢	<١٤٤٠٠>
ااااببججد	٨٩	<٢٥٢٠٠>	اااااببجد	٨٣	<٢٠١٦٠>
ااااببجده	١١٩	<٥٥٤٤٠>	اااااابجده	١١١	<٧٣٩٢٠>
اااابجدهو	١٥٩	<٥٤٠٥٤٠>	ااااا ببببب	٣٥	<٧٧٧٦>
ااابببججج	٦٣	<٢٧٠٠٠>	اااااببببج	٥٩	<١٢٩٦٠>
ااابببججد	٩٥	<٣٧٨٠٠>	ااااابببجج	٧١	<٢١٦٠٠>
ااابببجده	١٢٧	<٨٣١٦٠>	ااااابببجد	٩٥	<٣٠٢٤٠>
اااببججدد	١٠٧	<٨٨٢٠٠>	اااااببججد	١٠٧	<٥٠٤٠٠>
اااببججده	١٤٣	<١٣٨٦٠٠>	اااااببجده	١٤٣	<١١٠٨٨٠>
اااببجدهو	١٩١	<٣٦٠٣٦٠>	اااااابجدهو	١٩١	<٤٨٠٤٨٠>
ااابجدهوز	٢٥٥	<٢٠٤٢٠٤٠>	اااابببب جج	٧٤	<٣٢٤٠٠>
ااببججدده	١٦١	<٤٨٥١٠٠>	اااابببجد	٩٩	<١٥١٢٠>

١٤ – هنا تبدأ مخطوطة خ .

باقي المؤلف العشاري		
الأضلاع المؤلفة	<عدد> الأجزاء	الأمثلة
ا ا ا ا ب ب ب ج ج ج	٧٩	<٥٤٠٠٠>
ا ا ا ا ب ب ب ج ج د	١١٩	<٧٥٦٠٠>
ا ا ا ا ب ب ب ج د ه	١٥٩	<١٦٦٣٢٠>
ا ا ا ا ب ب ج ج د د	١٣٤	<١٧٦٤٠٠>
ا ا ا ا ب ب ج ج د ه	١٧٩	<٢٧٧٢٠٠>
ا ا ا ا ب ب ج د ه و	٢٣٩	<٧٢٠٧٢٠>
ا ا ا ا ب ج د ه و ز	٣١٩	<٩١٨٩١٨٠>
ا ا ا ب ب ب ج ج ج د	١٢٧	<١٨٩٠٠٠>
ا ا ا ب ب ب ج ج د د	١٤٣	<٢٦٤٦٠٠>
ا ا ا ب ب ب ج ج د ه	١٩١	<٤١٥٨٠٠>
ا ا ا ب ب ب ج د ه و	٢٥٥	<١٠٨١٠٨٠>
ا ا ا ب ب ج ج د د ه	٢١٥	<٩٧٠٢٠٠>
ا ا ا ب ب ج ج د ه و	٢٨٧	<١٨٠١٨٠٠>
ا ا ا ب ب ج د ه و ز	٣٨٣	<٦١٢٦١٢٠>
ا ا ا ب ج د ه و ز ح	٥١١	<٣٨٧٩٨٧٦٠>
ا ا ب ب ج ج د د ه ه	٢٤٢	<٥٣٣٦١٠٠>
ا ا ب ب ج ج د د ه و	٣٢٣	<٦٣٠٦٣٠٠>
ا ا ب ب ج ج د ه و ز	٤٣١	<١٥٣١٥٣٠٠>
ا ا ب ب ج د ه و ز ح	٥٧٥	<٥٨١٩٨١٤٠>
ا ا ب ج د ه و ز ح ط	٧٦٧	<٤٤٦١٨٥٧٤٠>
ا ب ج د ه و ز ح ط ي	١٠٢٣	<٦٤٦٩٦٩٣٢٣٠>

/ يح

إذا ضُرب عدد مركب في عدد أول ، فإن لم يكن المضروب فيه أحد أضلاع المركب الأوائل ، كان مجموع أجزاء السطح مثل مضروب أجزاء المركب مجتمعة في ذلك الأول مع المجتمع من أجزاء المركب مع المركب .

٥ فليكن آ مركبا و بَ أولَ غير الأوائل التي ينحل إليها آ وسطحهما جَ ، وليكن جميعُ أجزاء آ : دَ ، وهو مع آ : هَ .

فأقول : إن جميع أجزاء جَ مثل دَ في بَ مع هَ .

وذلك لأن مجموع أجزاء آ : دَ ، وكلٌ منها جزء جَ ، و آ أيضاً جزؤه ، وكلٌ واحد من سطوح بَ في كلٍ من أجزاء آ جزء له أيضاً .

١٠ فأقول : ولا يُوجد لـ جَ جزء غير ما ذُكر .

وإلا فليكن طَ غيرها . فهو إما أولٌ أو مركبٌ . فإن كان أول ، وهو يعدُ جَ المؤلف من آ في بَ ، و بَ أول ، فلا بد وأن يعدّ آ ، فيكون واحداً من أجزاء آ غير ما ذكر ، وقد انحصرت فيها ، هذا خلف .

وإن كان مركباً ، فإما أن يعدّه أول غير الأوائل التي تعدّ جَ ، أو يتكرر ١٥ في أضلاعه الأوائل ضلعٌ لم يتكرر بتلك العدة في أضلاع جَ ، أو بالعكس . وإلا لكان طَ واحداً من المؤلفة المذكورة التي هي أجزاء لـ جَ . فإن عده أول غير ما ذُكر كان ذلك الأول عادّاً لـ جَ ، ويَتَبَيّن الخلف بمثل ما مرّ غير مرة . وإن تكرر في أضلاعه <الأوائل> ضلع لم يتكرر بتلك العدة في أضلاع جَ — وليكن حَ — عدّ طَ جنسٌ من أجناس حَ في المرتبة السمية لعدة تكرره ، فيعد جَ أيضاً .
٢٠ وتَبَيَّن بالبيان المذكور في المقدمة السادسة والسابعة أن ذلك محال . وإن تكرر

١ — يح : يز — ك،خ — ناقصة — م — // ٥ — وسطحهما : ومسطحهما : ومسطحهما — ك — // ٧ — هَ : جزم — م —// ٨ — و آ أيضاً جزؤه : وايضاً جزؤه — ك،م —// ٩ — له : الضمير يعود على ج . // ١٠ — فأقول : أقول — ك —// ١١ — كان أول : أول — ناقصة — ك — وفي هامش خ // ١٤ — تعد : يعد — خ ، ك — بعد — م — // ١٦ — هي : ناقصة — خ ، م — // ١٧ — بمثل : فمثل — م — // ١٧ ، ١٨ — وإن تكرر ... لم يتكرر : وإن لم يكن في أضلاعه ضلع لم يتكرر — ك —// ١٩ — حَ : ج — م —// ٢٠ — أن : ناقصة — م —/ محال : مجال — م —//



في أضلاع جـ < الأوائل > ضلع لم يتكرر بتلك العدة في أضلاع ط ، فـ ط أحد أجزاء جـ من المؤلفة المذكورة ، هذا خلف .

فليس لـ جـ سوى ما ذكر < من > أجزاء . وجميع سطوح ب في كلٍّ من أجزاء ا مساوٍ لسطح ب في د ، وإذا أضيف إليه ه كان الجميع . ولتكن ح هي جميع أجزاء جـ .   ٥

أقول : ولم يتكرر شيء منها أيضاً : لأن أقسام ح منحصرة في قسمين : سطوح ب في كلٍّ من أجزاء ا ، وسطوح الواحد – الذي < هو > جزء لـ ب – في ا وكلٍّ من أجزائه ، أعني ه . ولا شيء من أقسام الثاني – أعني أقسام ه – بمكرر فيها ، وذلك ظاهر . وكذا لا شيء من أقسام الأول بمكرر فيها إذ هي سطوح عدد بعينه – أعني ب في أقسام د المتفاضلة جميعاً ، فتكون هذه السطوح   ١٠ على تلك النسب . وكذا لا شيء من أقسام الثاني مكرراً في أقسام الأول ؛ إذ لو تساوى اثنان منهما لتناسبت أضلاعهما بالشكل التاسع عشر من المقالة السابعة . وليكن أحدهما سطح ب في ك والآخرُ سطح الواحد – أعني جزء ب في ل ، فيكون نسبة الواحد إلى ك مثل نسبة ب إلى ل ، وبالإبدال نسبة الواحد إلى ب

٣ – سوى : ينوى – م – / أجزاء : جزء – خ ، ك ، م – / وجميع : الواو قد تكون فوق السطر وهي غير واضحة – ك – // ٤ – ا : ناقصة – م – / ه : و – م – غير واضحة تماماً خ – // ٤ ، ٥ – مساو... أجزاء جـ : ناقصة – ك – // ٦ – ح : حـ – م – // ٨ – ه : جزم – م – // ٩ ، ١١ – وكذا ... النسب : ناقصة – خ ، م – // ١٢ – منهما : منها – خ ، م – / لتناسبت : لتناسب – ك – / أضلاعهما : أضلاعها – خ ، م – / بالشكل التاسع عشر : بشكل يط – ك – / المقالة السابعة : مقالة ز – ك – المقالة التابعة – خ – // ١٣ – جزء : حـ – م – //

مثل نسبة كَ إلى لَ بالشكل الثالث عشر من المقالة السابعة . والواحد يعد بَ بعدة آحاد بَ ، فـ كَ يعد لَ بـ بَ . ولأن كَ ضرب في بَ فحصل لَ فـ بَ يعـــد لَ ، فيعد آ أيضاً ، فهو من أجزائه الأوائل ، وقد فرض خلافه ، هذا خلف . وإذا لم يتكرر شيء من أقسام جَ فـ حَ جميع أجزاء جَ من غير نقصان وزيادة .

< يطَ >

وإن كان بَ أحد الأضلاع الأوائل لـ آ فجميع أجزاء جَ حَ بعد أن يُلقى منه مضروب كلٍّ طرفي أربعة متناسبة ، مقدَّماها الواحد و بَ وتالياها قسمان من أقسام هَ .

أما وجوب تناسب هذه الأربعة حينئذ فبيِّنٌ . وأقل ما في الباب أن يكون ١٠ نسبة الواحد — وهو جزء بَ — إلى الواحد — وهو جزء آ — مثل نسبة بَ إلى بَ من أجزاء آ .

وأما وجوب أن يلقى مضروب طرفي كلٍّ أربعة منها ، فلأن أقسام جَ ، كما ذكرنا آنفاً ، منقسمة إلى سطح بَ في كلٍّ من أجزاء آ ، وسطوح الواحد — الذي هو جزء بَ — في كلٍّ من أقسام هَ .

١٥ وليكن تاليا الأربعة المتناسبة كَ لَ ونسبة الواحد إلى كَ كنسبة / بَ إلى لَ ، فمضروب الطرفين مثل مضروب الواسطتين بالشكل التاسع عشر من المقالة السابعة ، فقد تكرر بعض أقسام الثاني في الأول فوجب إلقاؤه . فإذا ألقي جميع ١٣٦-ظ

١ — مثل : ناقصة — ك — / كَ : طَ — خ ، م — / بالشكل ... السابعة : بشكل يجـ من مقالة زَ — ك — / نجد في هامش خ بحذاء الشكل الثالث عشر من المقالة السابعة نص هذا الشكل أي " كل أربعة أعداد فإن كانت متناسبة كان مسطح الأول في الرابع كسطح الثاني في الثالث ؛ وإن كان المسطح كالمسطح كانت متناسبة "ثم نجد أيضاً" إذا كانت أربعة أعداد متناسبة وأبدلته كانت أيضا متناسبة .// ٤ — جَ : حَ — ك ، خ — / زيادة : هناك فراغ في م ترك لرسم الخطوط كما هو مألوف . // ٧ — وتالياها : وتالها — ك — // ٩ — أما : فأما — ك — / وأقل ما في : وأقلها — ك — // ١٠ — جزء : جـ — م — // ١٠، ١١ — إلى بَ : كررها ناسخ م . // ١٢ — جَ : حَ — ك ، خ — // ١٣ — أجزاء : جزاء — م — // ١٤ — الذي هو : ناقصة — ك ، م — في هامش خ — / جزء : ضرب — م — // ١٦ — مثل : ناقصة — خ ، م / الواسطتين : الواسطين — خ ، م — // ١٦ ، ١٧ — بالشكل ... السابعة : بشكل يط من مقالة زَ // ١٧ — تكرر : تكون — ك — //

ذلك فبيّن أنه لم يبق مكرر ، وإلا فلم يلق الجميع ، فيكون الباقي من حَ – وليكن طَ – جميع أجزاء جَ من غير زيادة ونقصان ؛ وذلك ما أردناه .

واعلم أنه إذا كان أحد العددين يعد الآخر ، فالأسهل أن تلقي من أجزاء آ – أعني دَ – كلّ جزء إذا ضرب في بَ حصل واحد من تلك الأجزاء ؛ وهي الواحد وجميع أضلاعه الأوائل التي هي غير بَ ، وجميع مؤلفة تلك الأضلاع ، الثنائية والثلاثية وغيرهما ، إلا المؤلف من جميع تلك الأضلاع . وإن كان بَ مكرراً في أضلاع آ الأوائل مرة فيلقى بَ أيضاً ، وإن كان مرتين فمربعُه أيضاً ، وإن كان ثلاثاً فمكعبُه أيضاً ، وعلى هذا القياس . ثم يضرب الباقي من دَ في بَ ويزاد على الحاصل هَ فيبلغ أجزاء جَ من غير زيادة ونقصان . وإنما لم أطل الكلام في بيانه لأن المطلوب غير متوقف عليه .

كَ

إذا ضرب عدد مركب في عدد مركب كان جميع أجزاء السطح مثل سطح جميع أجزاء المضروب في المضروب فيه مع سطح جميع أجزاء المضروب فيه في المضروب مع جميع أجزائه ، إن لم يناسب اثنان من المضروب وأجزائه اثنين من المضروب فيه وأجزائه على الولاء ، وإن ناسب فجميع أجزائه هو جميع السطحين بعد أن يلقى منه كلٌ من مضروب طرفي أربعة متناسبة .

فليكن المركبان آ بَ وسطحهما جَ ، وليكن جميع أجزاء آ دَ ، وهو

١ – يلق : يبق – خ ، م – / حَ : حـ – م – // ٢ – وليكن طَ : ناقصة – خ ، م – / زيادة ونقصان : نقصان وزيادة – ك – // ٣ – واعلم ... الآخر : واعلم أن ب إذا كان أحد الأضلاع الأوائل لآ – ك – / العددين : المركبين – خ ، م – / يعد : بعد – م – // ٤ – حصل : يحصل – خ ، م – // ٦ – المؤلف : بالمؤلفة – ك ، م – / جميع : ناقصة – م – أضافها ناسخ خ تحت السطر . // ٧ – آ : ناقصة – م – / فيلقى : فيبقى – م – // ٩ – ويزاد : ويزداد – م – / على : فوق السطر في خ / فيبلغ : فبلغ – خ ، م – ضلع – ك – / جَ : ناقصة – م – آ – خ ، ك – / زيادة ونقصان : نقصان وزيادة – ك – // ١١ – كَ : يح – ك – ناقصة – خ ، م – // ١٢ – في عدد مركب : ناقصة – ك – // ١٣ – مع : ربع – م – // ١٤ – مع جميع : جميع ناقصة – خ ، م – // ١٤ ، ١٥ – إن لم يناسب ... أجزائه : ناقصة – خ ، م – // ١٥ – هو : وهو – خ ، م – // ١٦ – منه : فيه – م – ممحوة – خ – // ١٧ – فليكن : كتب ناسخ م قبل هذا " فليكن المركبان اب وسطحهما ، وليكن جميع أجزاء السطح مثل جميع أجزاء المضروب في المضروب فيه ، فربع سطح جميع أجزاء المضروب فيه في المضروب مع أجزائه وهو جميع السطحين بعد أن يلقى منه كل من مضروب طرفي أربعة متناسبة" ونقترح حذفها / المركبان : المركبات – ك – //

مع آ ه ، وجميع أجزاء ب ز ، وهو مع ب ح .

فأقول : إن جميع أجزاء ج هي جميع سطح د في ب و ه في ز – وليكن ط – إن لم يناسب اثنان من آ ، وأجزائه – أعني أقسام ه – اثنين من ب وأجزائه – أعني أقسام ح – على الولاء .

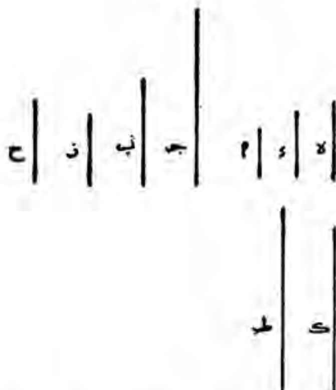
٥ فأما إن كان ط مجتمع<اً> من أجزاء ج ، فلأنه لما كان آ يعد ج فكذا جميع أجزائه أجزاءٌ لـ ج ، وكذا ب وجميع أجزائه أجزاءٌ له . ولأن آ ضرب في ب فحصل ج يكون كلٌ واحد من سطوح آ في كلٍ من أجزاء ب وكلٌ من سطوح ب في كل من أجزاء آ وكلٌ من سطوح كلٍ من أجزاء < آ > في كلٍ من أجزاء ب جزءاً له أيضاً ؛ لكن جميع سطوح آ في كل من أجزاء

١٠ ب – التي جميعها ز – هو مثل آ في ز ، وجميع سطوح آ وكلٌ من أجزائه – التي مجموعها ه – في كلٍ من أجزاء ب – ومجموعها ز – مثل سطح ه في ز ، فجميع السطحين – أعني ط – مجتمع من أجزاء ج . وأما أنه لم يشذ من هذا الجميع شيء من أجزائه : فلما قـد تبيّن أن سطوح كلٍ من أجزاء آ في ب وسطوح كلٍ من آ وكلٍ من أجزائه في كلٍ من أجزاء ب – التي هي أجزاء

١٥ ج – داخلة في ط . وكذا كلٌ واحد من آ و ب وكلٌ من أجزائهما ، لأن آ وكلاً من أجزائه داخل في الأجزاء المذكورة لضرب الواحد – الذي هو جزء من أجزاء ب – في آ وكلٍ من أجزائه ، وكذا ب وكلٌ من أجزائه لضرب الواحد من أجزاء آ فيها . وليس لـ ج جزء سوى المذكورة .

وإلا فليكن ك : وهو إما أول أو مركب . وليحلل آ و ب إلى أضلاعهما

١ – ز ؛ د – ك – / ح : لايمكن تمييز الجيم من الحاء في م ولن نشير إلا إذا أمكن ذلك . // ٥ – كان : ناقصة – خ ، م – / فكذا : فكذى – ك – // ٦ – وكذا : وكذى – ك – // ٧ ، ٩ – في كل من ... أجزاء ب : ناقصة خ ، م – // ٩ – جزءا : جزء – ك – // ١١ – ز : د – خ – // ١٣ – آ : ناقصة – م – // ١٤ – وسطوح ... أجزاء ب : كررها ناسخ م . // ١٦ – وكلاً : وكل – خ ، ك ، م – / داخل : دخل – خ ، م – / لضرب : يضرب – خ ، ك ، م – // ١٧ – لضرب : يضرب – ك ، م – اللام قصيرة في خ . // ١٨ – المذكورة : هنا رسم في مخطوطة " ك "



الأوائل ، وهي الأضلاع الأوائل اجـ . وبالبيان المذكور مرات نبين أن كـ إن كان أولَ فلا بد وأن يعد أحد تلك الأوائل ، وهو محال ، فهو مركب . وإن كان مركباً فلا محالة أن يكون أحد أضلاعه الأوائل مبايناً لكلٍّ من أضلاع جـ الأوائل أو أحد تلك الأضلاع مكرراً بعدة لم يتكرر بمثلها في أضلاع جـ الأوائل
٥ أو بالعكس . / ويظهر الخلف بمثل ما مرّ في المقدمة السابقة . فليس اجـ جزء ١٣٧-و
غير ما ذكر ، فلم يشذ من جميع السطحين المذكورين شيء من أجزائه .

أقول : ولم يتكرر شيء منها أيضاً .

إذ لو تساوى قسمان من أقسام كل منهما ، أعني سطح قسم من أقسام هـ في قسم من أقسام زَ < وسطح قسم من أقسام دَ في بَ > لزم أن تتناسب
١٠ أضلاعهما ، ويكون نسبة واحد من ضلعي أحدهما إلى واحد من ضلعي الآخر

١ – وهي : فهي – ك – / جَ : ح – ك – // ٢ – أول : أولا – خ ، ك ، م – وهذا جائز أيضاً إن حمل على الأسمية والتنكير ، وآثرنا اعتباره صفة ممنوعة من الصرف . / وهو محال : ناقصة – خ ، م – / فهو مركب : ناقصة – ك – / فهو : وهو – خ ، م – // ٣ – مركبا فلا : هامش – خ – / فلا محالة : فإما – ك – // ٤ – بمثلها – مثلها – خ ، م – // ٦ – المذكورين : مكررة – م – // ٧ – أيضا : ناقصة – ك – // ٨ – كل : وكل – ك – / أعني : ناقصة – خ – ولقد أشار الناسخ إلى هذا بالعلامة المعروفة ولكنه نسي أن يكتبها في الهامش // ٨، ٩ – من أقسام ... أقسام ه : من أقسام وكل منهما سطح قسم بين أقسام هَ ، – ك – // ٩ – أقسام زَ : أقسامه حـ – م – أقسام حَ – خ – //

كنسبة الثاني من ضلعي الأول إلى ثاني ضلعي الآخر بالشكل التاسع عشر من المقالة السابعة . وقد فُرض خلافه ، هذا خلف .

وإن ناسب اثنان من أقسام ه اثنين من أقسام ح فجميع أجزاء ج وهو ط بعد أن يلقى منه مضروب كل طرفي أربعة متناسبة . وإنما يلقى <ذلك> لأنه ٥ إذا كان نسبة قسمين من أقسام ه نسبة قسمين من أقسام ح ، فيكون مضروب الطرفين مثل مضروب الواسطتين ؛ فمضروب الطرفين مكررٌ واجبُ إلقاؤه من ط ، وكذلك مضروب طرفي كل أربعة متناسبة فحقّ استثناؤه .

وهذا العمل يسهل بأن يضرب نصف جميع أقسام ه الواقعة في كل أربعة متناسبة منها في جميع أقسام ح الواقعة في جميع الأربعات ، ويلقى الحاصل من ١٠ ط ، وبيانه ظاهر . فإذا ألقي فبيّنٌ أنه لم يبق مكرر ، وإلا فلم يلق الجميع ، فيكون الباقي من ط جميع أجزاء ج من غير نقصان وزيادة ، وذلك ما أردناه .

واعلم أنه إذا كان أحد المركبين يعد الآخر فالأسهل أن يكتفى بضرب العادّ مع < جميع أجزائه في > جميع أجزاء المعدود ، ثم نلقي من الحاصل المكررة ، فيبقى جميع أجزاء ج . وكذا لو كان المركبان متساويين ، ولم أستدل ١٥ عليه لأن بيان المقصود غير محتاج إليه .

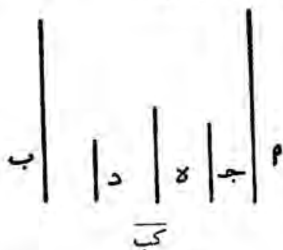
كا

كل عددين ليسا أقل اثنين على نسبتهما فهما مشتركان .

وليكونا ا ب ، فنأخذ أقل عددين على نسبتهما بالطريق المذكور في **الأصول**، وليكونا ج د ، فلا بد وأن يعد ج د ا ب عداً واحداً : الأقل للأقل ،

١ – ضلعي : ضلع – م – / ثاني ضلعي : ثاني ضلع – م – // ١ ، ٢ – بالشكل ... السابعة : بشكل يط من مقالة ز – ك – // ٤ ، ٧ – وإنما يلقى ... أربعة متناسبة : مكررة – م – // ٧ – استثناؤه : استثناءة – خ – استثناء – م – والمقصود استثناء ما كرر . // ٩ – منها : فهما – خ ،م – المقصود: كل اثنين من أقسام ه . // ١٠ – يلق : يكن – خ ،م – // ١٢ – واعلم : اعلم – ك – // ١٤ – فيبقى : يبقى – خ ، م – // ١٦ – كا : يط – ك – ناقصة – خ ، م – // ١٨ ، ١٩ – في الأصول : هامش – ك – المقصود : كتاب أوقليدس . //

والأكثر للأكثر ، بالشكل العشرين من المقالة السابعة . وليكن ذلك العدد ه ، فلأن ج ضرب في ه فحصل آ يكون ه عادا لـ آ . ولمثل ذلك يكون عاداً لـ ب ، فـ آ ب مشتركان ؛ وذلك ما أردناه .



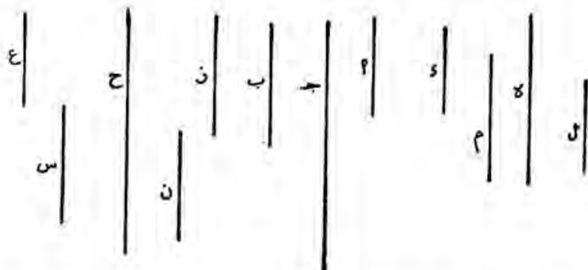
٥ ليكن آ ب مركبين سطحُهما ج ، و د جميع أجزاء آ ، وهو مع آ ه ، و ز جميع أجزاء ب ، وهو مع ب ح .

فأقول : كلما تناسب اثنان من أقسام ه < تناسباً > كتناسب اثنين من أقسام ح فلا بد وأن يتكرر بعض أجزاء آ ، أعني أقسام د ، في أجزاء ب ، أعني أقسام ز سوى الواحد .

١٠ وليكن قسما ه : ل م < و ل أقل من م > وقسما ح : ن س ، وليكن نسبة ل إلى م كنسبة ن إلى س ؛ وإذا لم يمكن أن يكون كل من ل ن مساوياً لتاليه ، أعني م س ، فليكن الأقل ل ن لأن نسبة ل إلى م كنسبة ن إلى س . فبالإبدال < تكون > نسبة ل إلى ن كنسبة م إلى س ، بالشكل الثالث عشر من المقالة السابعة . ولأن م س ليسا أقل عددين على نسبتهما فهما مشتركان ؛

١ – بالشكل ... السابعة : بشكل ك من مقالة ز – ك – ونجد في هامش – خ – نص هذه النظرية : " أقل الأعداد على نسبة تعد جميع الأعداد التي على نسبتها عدا واحدا ، الأقل للأقل والأكثر للأكثر " . / ه : ة – م – // ٢ – ج : ناقصة – ك – / ولمثل : وبمثل – خ ، م – / يكون : ناقصة – ك – هامش – خ – // ٤ – كب : ك – خ ، ك – ناقصة – م – // ٦ – أجزاء : هامش – خ – / ح : حـ – م – // ٧ – تناسب : يناسب – م – // ٨ – أقسام ... ب : مكررة – م – // ١٠ – ه : ناقصة – م – / ح : حـ – م – / ن س : د ه سه – م – // ١١ – ن : د ه – م – ممحوة – خ – / س : سه – م – // ١١، ١٢ – وإذا لم يمكن ... كنسبة ن إلى س : ناقصة – خ ، م – // ١٣ – ن : حد – م – / س : سه – م – / من : ناقصة – م – // ١٣ ، ١٤ – م – بالشكل ... السابعة : بشكل يج من مقالة ز – ك – // ١٤ – المقالة : مقالة – م – / س : سه – م – //

وليعدهما عَ . ولأن عَ يعدّ التاليين ، أعني مَ و سَ ، وهما إما أن يكونا نفسي آ بَ أو جزأين من أجزائها، فعَ يعدّ كلاً من آ بَ . فقد تكرر بعض أقسام دَ في أقسام زَ ؛ وذلك ما أردناه .



أقول : هذا الحكم ثابت أيضاً لو كان بَ أول بمثل ما ذكرناه ، أعني إذا كان نسبة بَ إلى الواحد نسبة قسمين من أقسام هَ ، كان بَ مكرراً في أجزاء هَ .

وليكن المثال بحاله فأقول : وكلما تكرر بعض أقسام دَ في أقسام زَ يلزم أن يتناسب / اثنان من أقسام هَ < تناسباً > كتناسب اثنين من أقسام حَ . ١٣٧ - ظ

وليكن المكرر عَ . و [ذلك] لأن أقل ما في الباب على ذلك التقدير أن يكون نسبة الواحد من أقسام هَ إلى عَ من تلك الأقسام كنسبة الواحد من أقسام حَ إلى عَ من تلك الأقسام فضلاً عن غيرها من المتناسبة ؛ وذلك ما أردناه .

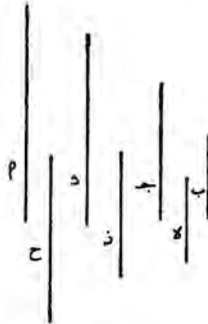
وقد بان أنه إذا لم يتكرر أي < قسم من > أقسام دَ في زَ ، فلم يتناسب أربعة فلم يتكرر شيء من أقسام طَ .

١ – وليعدهما : ويعدهما–م–/ولأن عَ : ناقصة–م–/سَ : سه–م–/إما : هامش– ك–// ٢ – جزأين : جزين – خ ، ك ، م – / أقسام دَ في : ناقصة – ك – // ٣ – في : و – خ ، م – //
٤ – نجد أمامها في ك رقم كا ، وهذا الرقم سنجده أمام الفقرة التالية في خ . / هذا : وهذا – ك – //
٥ – بَ إلى الواحد : الواحد إلى بَ – ك – // ٦ – أجزاء ه : جـ ه – م – جـ – خ – //
٨ – يتناسب : يناسب – م – / حَ : جَ – خ ، م – // ١١ – حَ : حـ – م – / ع : عين – م – /
المتناسبة : المناسبة – خ ، م – // ١٢ – أي : بعض – خ ، ك ، م – //

كج

كل عدد من آحاد سلسلة الاثنين فهو ناقص بواحد .

فليكن واحد منها آ ، وليرتب الواحد مع أعداد السلسلة على الولاء إلى آ ،
وهي واحد ب ج د آ ، وذلك لأنه ليس لـ آ من الأجزاء سوى الواحد وآحاد
السلسلة السابقة عليه لكون ما يلي الواحد منها وهو الاثنان أول بالشكل الثالث ٥
عشر من المقالة التاسعة . والواحد ينقص عن ب بواحد ، فهو مع ب يساوي
ضعف ب — أعني ج — إلا واحداً ، وليكن ه . وكذا ه مع ج يساوي
ضعف ج — أعني د — إلا واحداً ، وليكن ز . وكذا ز مع د يساوي ضعف
د — أعني آ — إلا واحداً ، وليكن ح ؛ فح الذي هو مجموع أجزاء آ أقل
<منه> بواحد ؛ وذلك ما أردناه . ١٠



كد

إذا استخرج من عدد من تضاعيف الاثنين الأفرادُ كما سبق ذكرها في

١ – كج : كب – خ ، ك – ناقصة – م – // ٣ – وليرتب : ولترتب – خ – ولرتت – م – ولترسب – ك – // ٤ ، ٥ – الواحد ... أول : ب ج د – خ – ج د – م – // ٥ ، ٦ – بالشكل ... التاسعة : بشكل يج من مقالة ط – ك – / ونجد في هامش خ نص هذه النظرية "إذا توالت أعداد متناسبة من الواحد وكان الذي يلي الواحد أول فلا يعد الأكثر منها عدد غيرها". / ٦ – ينقص عن : ينقص واحد عن – ك – // ٩ – آ : ناقصة – م – // ١١ – كد : كج – ك ، خ – ناقصة – م – //

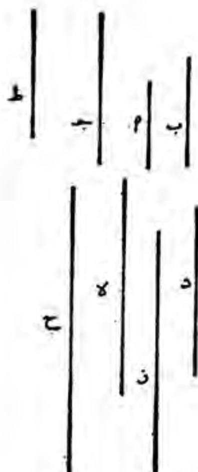
طريقة استخراج المتحابين ، وكانت أوائل سوى الثالث ، فالزوج الذي من تضاعيف الاثنين إذا ضرب في الفرد الثالث والرابع كان السطح الأكثر زائداً على الأقل بمثل الفرد الرابع إلا ضعف الزوج إلا واحداً .

فليكن الزوج الذي من تضاعيف الاثنين آ ، والفرد الأول ب والفرد الثاني ج والثالث د والرابع ه ، و ب ج ه ثلاثتها أوائل ، ومسطحا آ في د ه : ز ح ، وضعف آ إلا واحداً ط ، فأقول : إن ح يزيد على ز بمثل ه إلا ط . وذلك لأن آ شيء ، فب شيء ونصف إلا واحداً ، و ج ثلاثة أشياء إلا واحداً ، وسطحهما ، أعني د ، أربعة أموال ونصف وواحد إلا أربعة أشياء ونصفاً ، وجميع ب ج د – أعني ه – أربعة أموال ونصف إلا واحداً . ولأن فضل ح على ز بقدر سطح آ في الفضل بين ه د – وليكن ك ، وهو أربعة أشياء ونصف إلا اثنين – فالسطح أربعة أموال ونصف إلا شيئين . و ه أربعة أموال ونصف إلا واحداً . وإذا زيد على السطح شيئان إلا واحداً ساوى ه . فتبيّن : أنّ فضل ه على السطح < هو > بشيئين إلا واحداً ، أعني ضعف آ إلا واحداً ؛ ففضل ح على ز به < هو > إلا بشيئين إلا واحداً ؛ وذلك ما أردناه .

كه

وليكن المثال بحاله ، فأقول : إنه لم يماثل شيء من أجزاء آ شيئاً من أجزاء د سوى الواحد . وذلك لأنه ليس لـ آ جزء من الأعداد سوى آحاد سلسلة الاثنين المتقدمة على آ في النظم الطبيعي وكلها أزواج ، وليس لـ د جزء من الأعداد سوى ب ج الأولين ؛ وهما فردان لكون ب مثلاً ونصفاً لـ آ – الذي هو عدد < من تضاعيف > الاثنين إلا واحداً – فليس هو < من تضاعيف > الاثنين ،

١ – فالزوج – والزوج – خ ، م – // ٣ – إلا ضعف : أي ضعف – خ ، م – // ٤ – فليكن الزوج الذي : فليكن الزوج إلا واحدا فليكن الزوج الذي – م – // ٥ – والرابع : ووالرابع – خ – // ٦ – وضعف ... واحداً : مكررة – ك – / ح : حـ – م – / ه : ح – ك – // ٧ – و ج : و بحـ – خ ، م – // ٨ – إلا أربعة : الاربعة – م – // ٩ – ح : حـ – م – // ١٣ – بشيئين : الباء مهملة وهي بين اللام والباء – ك – // ١٤ – ح : حـ – خ ، م – / بشيئين : شيئين – ك – // ١٥ – كه : كد – خ ، ك – ناقصة – م – // ١٦ – شيئا من أجزاء : ناقصة – ك – // ١٧ – د : ب – خ ، م – // ١٨ – لـ د : له – خ ، م – // ١٩ – عدد : غير – خ ، ك ، م – // ٢٠ – هو : أي ب / الاثنين : اثنين – ك – //



وبالأولى ألا يكون جـ أيضاً < من تضاعيف > الاثنين . فلا شيء منهما بجزء من أجزاء آ ؛ وذلك ما أردناه . / ١٣٨-و

كو

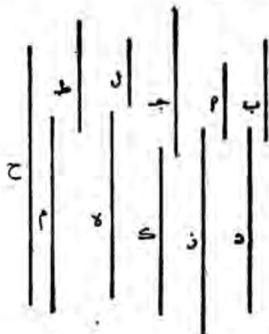
وليكن المثال بحاله ، فأقول : إن ز ح متحابان .

٥ وذلك لأن آ المركب ضُرب في ه الأول فحصل ح ، يكون جميع أجزاء ح مساوياً لسطح جميع أجزاء آ — وليكن ل — في ه مع المجتمع من أجزاء آ مع آ — < وليكن > ط . ولما كان ل هو آ إلا واحداً، فسطحه في ه هو ح إلا ه ، ومع ط ح إلا ه إلا ط ، وقد كان ز مثل ح إلا ه إلا ط ، فجميع أجزاء ح يساوي ز من غير زيادة ونقصان .

١٠ و ه ليس مماثلاً لواحد من أجزاء آ لكونه فرداً ولكونه أكثر من آ ، فلا

٣ — كو : كه — خ ، ك — ناقصة — م —// ٤ — ح : حـ — م —// ٥ — ح : حـ — م — / يكون : فيكون — خ ، م —// ٦ — ح مساويا : حـ مساويا — م —// ٧ — ح : حـ — م — // ٨ — ومع ط ... مثل ح : ناقصة — خ ، م — / أجزاء ح : أجزاء جـ — م — // ٩ — ونقصان : ناقصة — خ ، م — الشكل الذي قبل الأخير . // ١٠ — فردا : مفردا — خ ، م — //

يمكن أن يكون مكرراً . ولأن آ المركب ضرب في د المركب فحصل ز يكون جميع أجزاء ز مثل سطحي ل في د و ط في ک مع الواحد ، أعني جميع أجزاء د ،وليكن م . فأما ل في د فهو ز إلا د لأن ل هو آ إلا واحداً . وقد تبيّن أن آ في ک مثل ه إلا ط ، فآ في ک يكون مثل ه إلا جميع ط ، [و ک] و ه إلا ک هو د ، فل في ک مثل د إلا ط . فجميع آ ل – أعني ط – في ک مثل جميع د و ه إلا ط اثنين ، و ط في م يزيد على هذا السطح بـ ط لأن م يزيد على ک بواحد ، فسطح ط في م مثل جميع د و ه إلا ط . فإذا أضيف < سطح ط في م > إلى سطح ل في د – أعني ز إلا د – صار المبلغ جميع ز و ه إلا ط . وقد كان أيضاً ح جميع ز و ه إلا ط .



فأجزاء ز أيضاً مثل ح كما كانت أجزاء ح مثله ، ولم يقع شيء منها مكرراً لأنه لم يتكرر من أجزاء آ د ، فز ح متحابان ؛ وذلك ما قصدناه .

١ – آ : ناقصة – خ ، م – // ٢ – سطحي : سطح – خ ، م – / ل : ا – خ ، م – // ٣ – لأن : مكررة – خ – / واحدا : الواحد – خ ،م – // ٤ – فآ : فل – ک – / يكون : ناقصة – خ ، م – // ٥ – هو : وهو – خ ،م – // ٦ – اثنين : آ من ز – ک – ، والمقصود : مرتين . // ٧ – بواحد فسطح : نجد في م بين هاتين الكلمتين ما يلي " فسطح ط في م يزيد على السطح بـ ط لأن م يزيد على ک بواحد " . // ٧ ، ٨ – فإذا أضيف ... إلا ط : مكررة – م – مع كتابة فإذا : ذا . // ٩ – ح : حـ – م – / جميع : فجميع – خ ، م – / ز : د – خ ، م – // ٨ ، ٩ – وقد كان ... إلا ط : ناقصة – ک – // ١٠ – ح (الثانية) : في – م – / يقع شيء : يعتد بشيء – ک – // ١١ – آ د : د – ک – آ ز – خ ،م – بدون الخطوط فوق الحروف في م كالعادة . / قصدناه : نجد بعدها في ک : " ولنختم الكلام ها هنا حامدين لولي كل خير وجميل ، الهادي إلى سواء السبيل ، ومصلين على نبيه محمد وآله الطيبين الطاهرين ، حسبنا الله ونعم الوكيل " . //

< كز >

وإذ قد فرغنا من تبيين العمل فلنوضحه بأمثلة :

أحدها : أن نفرض الزوج الذي من تضاعيف الاثنين أربعــة ، ونزيد عليها نصفها إلا واحداً تبلغ ه وهو الفرد الأول ، ونضرب الأربعة في ثلاثة ، وننقص منها واحداً تبقى أحد عشر وهو الثاني ؛ ثم نضرب الأول في الثاني يحصل هه وهو الثالث ؛ ونزيد عليه الأولين فيحصل ٧١ وهو الرابع ولأنها – ســوى الثالث – أوائلُ ؛ فنضرب الأربعة في هه و ٧١ يحصل ٢٢٠ و ٢٨٤ متحابين .

وامتحانه بوجهين : إما إجمالاً بأن يستخرج أجزاء ٢٢٠ جميعاً : بأن يستخرج أجزاء ضلعه – أعني ٤ المركب من ٢ ، ٢ الأولين – وهي ١ ، ٢ ؛ و هه المركب من ه ، ١١ الأولين أيضاً ، وهي ١ ، ه ، ١١ . ولأن ٤ و هه مركبان ، فأجزاء سطحهما جميعاً مضروبُ أجزاء ٤ – أعني ٣ – في هه وهو ١٦٥ ، مع مضروب أجزاء هه – أعني ١٧ – في ٤ ، مع أجزائه – أعني ٧ – وذلك ١١٩ ، وهما معاً ٢٨٤ .

ويستخرج أجزاء ٢٨٤ جميعاً ، المركب من ٤ – المركب – في ٧١ الأول بأن نضرب أجزاء ٤ جميعاً – أعني ٣ – في ٧١ ، يكون ٢١٣ . ونزيد عليه ٤ مع أجزائه وهو ٧ فيبلغ ٢٢٠ .

وإما تفصيلاً بأن نتعرف عددَ أجزاء الأول ، أعني ٢٢٠ . فلأنه مؤلفٌ رباعي من ٢ ٢ ه ١١ فهو الصنف الرابع ، وله من الأجزاء أحد عشر فقط ، ثم نضع أربعة مع أجزائه مفصلاً ، وهي ١ ، ٢ ، ٢ وكذلك هه مع أجزائه

٢ – من : عن – خ ، ك ، م – / فلنوضحه : فليوضحه – م – // ٣ – ونزيد : فنزيد – م – فتزيد – خ – // ٤ – نصفها : نصفا – خ ، م – / ونضرب : ويضرب – م – / ثلاثة : الثلاثة – خ ، م – // ٥ – أحد عشر : ١١ – خ ، م – // ٨ – بأن – فبأن – خ ، م – ١٣ – ١١٩ : و ١١ – م – // ١٤ – جميعا : جميع – ك – // ١٥ – ٢١٣ : ٢١ ٣ – ك – / ٤ : ثم – م – // ١٦ – فيبلغ : فبلغ – خ ، م – // ١٧ – بأن : فبأن – ك – // ١٨ – ١١ : ١ ١ – م – / أحد عشر : ١١ – ك – // ١٩ – أربعة : ٤ – ك – / وهي : ناقصة – ك – / ٢ وكذلك : ٤ – ك – / أجزائه : أجزائه كذلك – ك – / وكذلك...اجزائه : هامش – خ – //

هكذا : ١ ، ٥ ١١ ٥٥ ؛ ثم نضرب الواحـــد من الأول في أقسام الثاني يحصل ١ ، ٥٥ ، ١١ ، ٥٥ ، ثم ٢ منـــه فيها يحصل ٢ ، ١٠ ، ٢٢ ، ١١٠ ، ثم ٤ في أقسام / الثاني غير ٥٥ يحصل ٤ ، ٢٠ ، ٤٤ . وهي أجزاء ٢٢٠ مفصلاً ، ١٣٨-ظ عدتها أحد عشر منها كما عرفت ، وجميعها ٢٨٤ . ثم نتعرف عدد أجزاء الثاني ٥ أعني ٢٨٤ ، المؤلف من ٢ ، ٢ ، ٧١ . فلأنه الصنفُ الثاني من المؤلف الثلاثي فأجزاؤه ٥ ؛ ثم نضع ٤ مع أجزائه مفصلاً ، وكذلك ٧١ هكذا ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ . ثم نضرب ١ من الأول في قسمي الثاني يحصل ١ ، ٧١ ، ثم ٢ منه فيهما يحصل ٢ ، ١٤٢ ، ثم ٤ من الأول في ١ من الثاني يحصل ٤ ، وهذه خمسة أعداد وهي أجزاء ومجموعها ٢٢٠ . فهما أقل متحابين .

١٠ وأيضاً فلنفرض الزوج ثمانية ، فالفرد الأول ١١ والثاني ٢٣ والثالث — مضروبهما — ٢٥٣ ، والرابع — جميعها — ٢٨٧ . فلأن الرابع ليس بأول إذ يعده السبعة بإحدى وأربعين مرة ، فلا يتأتّى منه المتحابان . وقد وجدت في بعض تواليفهم أن مثل المتحابين ما يحصل من هذه الأفراد ، وهما مضروب الثمانية في الفرد الثالث ، أعني ٢٠٢٤ ومضروبها في الرابع ، أعني ٢٢٩٦ ، وحكم ١٥ عليهما بالتحاب ؛ وذلك سهو يظهر لمنْ تَبَيَّنَ ، فلنبينه بأن تستخرج أجزاء ٨ ، ونضعها مع جميع أجزائها : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ؛ وكذا أجزاء ٢٥٣ : ١ ، ١١ ، ٢٣ ، ٢٥٣ ، وكذا أجزاء ٢٨٧ ؛ ١ ، ٧ ، ٤١ ، ٢٨٧ ثم نستخرج

١ — هكذا ... الثاني : هامش — خ — / هكذا : ناقصة — ك — / الواحد : ١ — خ — ناقصة — م — / أقسام : كل من — ك — // ٢ — يحصل : حصل — خ ، ك ، م — / ١٠ : ٢٠ — ك — // ٤ — منها : ناقصة — ك — فوق السطر — خ — // ٦ — فأجزاؤه ٥ : فأجزاء — م — / ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ : ١ ٢ ٢ ١ ١ ٧١ — خ — بدون الخطوط التي فوق الأرقام — م — ١ ٢ ٤ ١ ١ ٧١ — ك — // ٧ — فيهما : فهما — خ ، ك ، م — // ٨ — ٢ ، ١٤٢ : ٢ ٢ ١٤ ٤٤ — ك — ٢ ٢ ١٤ ٤ ٤ — م — / ثم : ناقصة — م — / الأول : الأولى — ك — / وهذه : وهي — خ ، م — // ٩ — وهي : مكررة — ك — // ١٠ — فلنفرض : فليفرض — م — / فالفرد : والفرد — ك — // ١١ — جميعها : جميعا — م — // ١٢ — بإحدى : بأحد — خ ، ك ، م — / وقد وجدت : ووجدت — ك — // ١٣ — ما — مما — ك — / الثمانية : ٨ — خ ، م — // ١٤ — ومضروبها : ومضروبهما — ك — // ١٥ — عليهما : عليه — ك — / بالتحاب : بالتجاب — م — // ١٦ — ونضعها : فيضعها — م — خ — / أجزائها : أجزائه — خ ، ك ، م — لزم التأنيث لأن الضمير يعود على ٨ . / ٢٥٣ : ٣ ٥ ٢ — ك — // ١٧ — وكذا : هامش — خ — / ١ ؛ ١١ — خ ، م — / ٢٨٧ : ٧٧ — م — / نستخرج : يستخرج — م — هنا تنتهي الصفحة في مخطوطة م ، وتنقطع المخطوطة . //

أجزاء ٢٠٢٤ مفصلاً بأن نضرب ١ من الموضوع الأول في أقسام الموضوع الثاني وهي أربعة ، فتحصل هي بأعيانها ؛ ثم ٢ من الأول في أقسام الثاني يحصل ٢ ، ٢٢ ، ٤٦ ، ٥٠٦ ؛ ثم ٤ من الأول فيها يحصل ٤ ، ٤٤ ، ٩٢ ، ١٠١٢ ؛ ثم ٨ من الأول فيها سوى الرابع يحصل ٨ ، ٨٨ ، ١٨٤ ؛ وهي خمسة عشر
٥ جزءاً ؛ ونصححه أنه مؤلف خماسي من ١ ، ٢ ، ١١ ، ٢٣ فهو الصنف الرابع وأجزاؤه ١٥ ، مجموعها ٢٢٩٦ . وأيضاً نضرب ١ من أقسام الموضوع الأول في أقسام الموضوع الثالث فيحصل ١ ، ٧ ، ٤١ ، ٢٨٧ ؛ ثم ٢ منه فيها يحصل ٢ ، ١٤ ، ٨٢ ، ٥٧٤ ؛ ثم ٤ منه فيها <يحصل> ٤ ، ٢٨ ، ١٦٤ ، ١١٤٨ ؛ ثم ٨ منه فيها سوى ٢٨٧ يحصل ٨ ، ٥٦ ، ٣٢٨ ؛ وهي أجزاء خمسة عشر
١٠ مثل الأولى ، إذ هو مؤلف مثل الأول ، ومجموعها ٢٧٤٤ ، فهو يزيد على ٢٠٢٤ بسبعمائة وعشرين . والغلط إنما وقع عن تصوره ٢٨٧ عدد أول ، فإنه يسقط حينئذ عن مجموع أجزائه جميع ٧ و ٤١ – أعني ضلعي ٢٨٧ ، وهو ٤٨ – في ١٥ ، جميع الموضوع الأول . وذلك المجموع هو ٧٢٠ الذي به زادت على ٢٠٢٤ .

١٥ هذا ، وأيضاً فلنفرض الزوج ١٦ يكون الفرد الأول ٢٣ والثاني ٤٧ والثالث ١٠٨١ والرابع ١١٥١ ؛ وجميع الثلاثة أوائل . أما الأولان فظاهر . وأما الثالث فلأنه فرد ، فلا يعدّه زوج ؛ ولا يعدّه الثلاثة – إذ يبقى اثنان – فلا يعــده التسعة ، وسائرُ معدوداتها ؛ ولا الخمسة إذ ليس ما معه من الآحاد خمسة ؛ ولا السبعة إذ يبقى ثلاثة ؛ فلا يعدّه منطق ولا أصم ولا مشترك . فلنستكشف عن
٢٠ الأوائل على التوالي ، إلى أن يزيد عليه مربعه . فنقسمها على مربع أحد عشر – أعني ١٢١ – يبقى ٦٢ غير منقسم على الجذر ، أعني ١١ ؛ ثم على مربع ١٣ –

٢ – فتحصل : فيحصل – ك – // ٥ – ونصححه : ويصححه – خ – // ٦ – أقسام : هامش – خ – // ٧ – منه : ناقصة – خ – // ١٢ – يسقط حينئذ : حينئذ يسقط – خ –// ١٣ – زادت : زدت – خ – // ١٤ – ٢٠٢٤ : هذا الخطأ الذي يشرح أسبابه كمال الدين الفارسي لم ينتبه إليه في القرن الخامس عشر شرف الدين اليزدي وجمشيد الكاشي كما سنرى فيما بعد . // ١٥ – الثالث : أي ١١٥١ // ١٩ – ولا أصم ولا مشترك : ولا مشترك – ك – ولا أصم مشترك – خ – // ٢٠ – التوالي : السالى – ك – غير واضحة تماما – خ – / فنقسمها : مهملة – ك – فقسمتها – خ – وهي أيضاً مهملة .// ٢١ – أعني ١١ : ناقصة – خ –/ ثم على مربع ١٣ : هامش – خ – //

أعني ١٦٩ – يبقى ١٣٧ غير منقسم على جذره ، أعني ١٣ ؛ ثم على مربع ١٧
– أعني ٢٨٩ – يبقى ٢٨٤ غير منقسم على جذره ، ثم على مربع ١٩ – أعني
٣٦١ – يبقى ٦٨ غير منقسم على جذره ؛ ثم على مربع ٢٣ – أعني ٥٢٩ –
يبقى ٩٣ غير منقسم على جذره ؛ ثم على مربع ٢٩ – أعني ٨٤١ – يبقى ٣١٠
٥ غير منقسم على جذره / ، إذ يبقى عشرون ؛ ثم على مربع ٣١ ، أعني ٩٦١ – ١٣٩-و
يبقى ١٩٠ غير منقسم على جذره ، وهو لم ينقسم على مربع غيرها من الأوائل ،
إذ مربعُ ما يتلوها – وهو ٣٧ – ١٣٦٩ . فهو أول .

وإذ ذاك ، فنضرب ١٦ في ١٠٨١ يحصل ١٧٢٩٦ وفي ١١٥١ يحصل
١٨٤١٦ فهما متحابان .

١٠ فنستخرج أجزاء الأول مجملاً ، وهما ١٦ ١٠٨١ ، فأجزاء الأول مجملاً
١٥ ؛ وأجزاء الثاني كذلك ٧١ . ثم نضرب أجزاء الأول – وهو ١٥ – في الثاني
مع أجزائه – أعني ١١٥٢ – يكون ١٧٢٨٠ ؛ ثم نضرب الأول – وهو ١٦ –
– في أجزاء الثاني – وهو ٧١ – يحصل ١١٣٦ . فإذا زيد على الحاصل ، بلغ
١٨٤١٦ ، وهو أعظم المتحابين . وكذلك نستخرج أجزاء الثاني بتعرُّف أجزاء
١٥ ضلعيه ، وهما ١٦ ١١٥١ . فأجزاء الأول ١٥ ، وأجزاء الثاني واحد .
فنضرب أجزاء الأول في الثاني ، بتعرف أجزاء ضلعيه مع الواحد ، أعني ١١٥٢ ،
يحصل ١٧٢٨٠ ؛ ثم نضرب الأول – أعني ١٦ – في أجزاء الثاني ، يكون ١٦ ،
فنزيده على الأول ، . يحصل ١٧٢٩٦ .

فإن أردت التفصيل ، وضعتَ – لاستخراج أجزاء الأقل – ضلعيه
٢٠ وأجزاءهما مفصلاً : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ؛ ١ ، ٢٣ ، ٤٧ ، ١٠٨١ ؛
ثم ضربت ١ من الأول في أقسام الثاني ، يحصل ١ ، ٢٣ ، ٤٧ ، ١٠٨١ ؛ ثم

١ – أعني ١٦٩ يبقى ١٣٧ : هامش – خ – / غير منقسم : ناقصة – خ – / على جذره : هامش – خ – / جذره : الجذر – ک – / أعني ١٣ : ناقصة – خ – / ثم على مربع ١٧ : هامش – خ – // ٣ ، ٤ – أعني ٥٢٩...٢٩ – أعني : هامش – ک – // ٥ – ٩٦١ : ٩٦٠ – ک – // ٧ – ما يتلوها : هامش – ک – // ١٠ – فنستخرج : فيستخرج – ک – / الأول : الأوائل – خ – / وهما : وهو – خ – // ١٦ – فنضرب : فيضرب – ک – / بتعرف أجزاء ضلعيه : ناقصة – ک – // ١٧ – نضرب : يضرب – ک – / يكون : يكن – ک – // ١٩ – الأقل : الأول – خ – //

ضُرب ٢ منه في جميعها ، يحصل ٢ ، ٤٦ ، ٩٤ ، ٢١٦٢ ؛ ثم ٤ منه في جميعها ، يحصل ٤ ، ٩٢ ، ١٨٨ ، ٤٣٢٤ ؛ ثم ٨ منه في جميعها ، يحصل ٨ ، ١٨٤ ، ٣٧٦ ، ٨٦٤٨ ؛ ثم ١٦ فيها – سوى الرابع – يحصل ١٦ ، ٣٦٨ ، ٧٥٢ ، وهي تسعة عشر جزءاً . ويصحّحه أنه مؤلف سداسي من ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢٣ ، ٤٧ .

وكذا وضعتَ لاستخراج الأعظم – منفصلين ، وضربت ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ من الثاني في ١ من أقسام الأول – أعني ١ ، ١١٥١ – يحصل ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ؛ ثم ١١٥١ منه في الأقسام – سوى الأخير – يحصل ١١٥١ ، ٢٣٠٢ ، ٤٦٠٤ ، ١٢٢٠٨ ؛ وهي تسعة أجزاء . ويصحّحه أنه مؤلف خماسي من ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ١١٥١ ، فيكون الصنف الثاني وأجزاؤه .

ثم إذا جمعتَ هذه الأقسام ، حصل الأول ، وإذا جمعت تلك حصل الثاني ؛ وذلك ما أردناه .

تمت الرسالة بحمد ذي الجود والعلى ، والصلاة على نبيه صاحب الكمالات والنهى ، وعلى صحبه وأهل بيته أهل الهدى .

١ – ضرب : ناقصة – خ –// ٤ – تسعة عشر : ١٩ – ک – // ٥ – ٢٣ : ١٣ – ک – //
٦ – وكذا : ولذا – خ –// ٧ – أعني : هامش – خ –// ٩ – ١٢٢٠٨ : ٩١٠٨ – ک – //
١٠ – وأجزاؤه : كأن أمامها ٩ في ک // ١٣ ، ١٤ – تمت ... الهدى : ناقصة – ک – ونجد بعدها " فرغ من تحريره بحمد الله تعالى وحسن توفيقه العبد الضعيف الراجي إلى رحمة ربه اللطيف نوح بن علاء الدين الاتعانى يوم السبت وقت الضحى عشرين من شهر رجب سنة سبع وثلاثين وسبعمائة في المدرسة الصادقية رحم الله رافعها في محروسة بغداد حرسها الله من الآفات وصلى الله على نبيه محمد وآله أجمعين " . وفي أسفل الصفحة نجد " طالعه الفقير إلى الله تعالى محمد بن أبي الفتح (اسم غير مقروء) المصري سنة ٩٠٥ عربية " .
ونجد في خ " فرغت من انتساخ هذه النسخة الشريفة الميمونة بعون الله تعالى وحسن توفيقه في أواخر ذي الحجة إحدى وتسعين وثمانمائة هجرية ، أنا العبد الضعيف عبد (النبي ؟) بن محمد بن حسين البيرجندي ، غفر الله له ولوالديه ولأستاذيه آمين " .

زين الدين التنوخي
فقرة من «كتاب في علم الحساب»

بسم الله الرحمن الرحيم

واستخراج الأعداد المتحابة : أن تجمع الواحد والاثنين مع ما يليهما من ٧٨ - و
٥ أعداد زوج الزوج على الولاء إلى أن تجمع منها عدداً إن زدت عليه العدد الأخير من أعداد زوج الزوج المجموعة كان عدداً أولَ . وإن ربّعت ما بعد الأخير من الأعداد المجموعة ، وزدت عليه ثمنه ، ونقصت منه واحداً ، وكان بعد ذلك عدداً أول ، فإنك إذا ضربت حينئذ أحد الأولين في الثاني ، ثم المبلغَ في العدد الأخير من أعداد زوج الزوج المجموعة ، كان من ذلك العدد
١٠ الزائد من العددين المتحابين ؛ وإذا ضربت العدد الثالث من الأُوَل في العدد الأخير من أعداد زوج الزوج المجموعة ، كان المبلغ العدد الناقص من العددين المتحابين . كذلك نستخرج الأعداد المتحابة من أعداد زوج الزوج إلى غير نهاية .

مثال ذلك : إذا جمعت الواحد والاثنين والأربعة ، وزدت على المبلغ أربعة ، صار أحد عشر ، وهي عدد أول . وإذا نقصت من المبلغ — أعني السبعة
١٥ — اثنين ، بقي خمسة ، وهي عدد أول . وإذا ربّعت ما بعد الأربعة ، وهي الثمانية ، وزدت على المبلغ ثمنه ، ونقصتَ منه واحداً ، كان الباقي أحداً وسبعين ، وهي عدد أول . فإذا ضربت الخمسة في الأحد عشر ، ثم المبلغَ في الأربعة ، بلغ مائتين وعشرين ، وهي العدد الزائد من العددين المتحابين . وإذا ضربت أحداً وسبعين في الأربعة ، بلغ مائتين وأربعة وثمانين ، وهي العدد الناقص
٢٠ من العددين المتحابين .

بيان أن هذين العددين متحابان : أنك إذا أخرجت أجزاء مائتين وعشرين ، التي هي : جزء من مائتين وعشرين الذي < هو > واحد ، وجزء من مائة وعشرة

٥ — العدد : فوق السطر // ٦ — أول : أولا / ربعت : رفعت // ٧ — وكان : كان //
٨ — أول : أولا // ١٦ — واحداً : واحد // ٢٢ — وجزء من مائة : جزء من مائة //

الذي هو اثنان ، وجزء من خمسة وخمسين الذي هو أربعة ، وجزء من أربعة
وأربعين الذي هو خمسة ، وجزء من اثنين وعشرين الذي هو عشرة ، وجزء
من عشرين الذي هو أحد عشر ، وجزء من أحد عشر الذي هو عشرون ،
وجزء من عشرة الذي هو اثنان وعشرون ، وجزء من خمسة الذي هو أربعة
٥ وأربعون ، وجزء من أربعة الذي هو خمسة وخمسون ، وجزء من اثنين الذي
هو مائة / وعشرة ؛ كان الجميع مائتين وأربعة وثمانين . ٧٨ - ظ

< فإذا أخرجت أجزاء مائتين وأربعة وثمانين – التي هي جزء من
مائتين وأربعة وثمانين > الذي هو واحد ، وجزء من مائة واثنين وأربعين الذي
هو اثنان ، وجزء من واحد وسبعين الذي هو أربعة ، < وجزء من أربعة >
١٠ الذي هو واحد وسبعون ، وجزء من اثنين الذي هو مائة واثنان وأربعون – كان
الجميع مائتين وعشرين . وإذا أردت إخراج المتحابين اللذين بعد هذين ، فلا
تجد الشروط حتى تجمع أعداد زوج الزوج مع الواحد والاثنين إلى الستة عشر ،
وهي عدد أول مجموعها أحد وثلاثون ، وإذا زدت عليها ستة عشر بلغت سبعة
وأربعين ، وإذا نقصت منها ثمانية بقي ثلاثة وعشرون ، وهي عدد أول . وإذا
١٥ ربّعت اثنين وثلاثين وزدت على المبلغ ثمنه ونقصت منه واحداً ، صار ألفاً
ومائة وواحداً وخمسين ، وهي عدد أول . فإذا ضربت ثلاثة وعشرين في سبعة
وأربعين ثم المبلغ في ستة عشر ، بلغ سبعة ألفاً ومائتين وسته وتسعين ، وهي
العدد الزائد ، من العددين المتحابين . وإذا ضربت ألفاً ومائة وأحداً وخمسين
في ستة عشر بلغ ثمانية عشر ألفاً وأربعمائة وستة عشر ، وهي العدد الناقص ،
٢٠ من العددين المتحابين .

وكذلك تستخرج إلى غير نهاية كلما جمعت عدداً من أعداد زوج الزوج
ولم تجدها مستوفية للشروط تقدمتها إلى غير نهاية حتى تجد المستوفية للشروط .

٩ – مكان ما أضفناه بياض في الأصل .// ١١ – اللذين: الذين .// ١٣ – وهي: المقصود
وهي مجموعة . / عليها : علها //

محمد باقر اليزدي

فصل من «عيون الحساب»

بسم الله الرحمن الرحيم

فصل في استخراج العددين المتحابين*

٦٧ - و

٥ اللذين أحدهما ناقص والآخر زائد ، ومجموع أجزاء كل منهما مساوٍ للآخر

نأخذ من تضاعيف الاثنين عدداً إذا ضربناه مرة / في واحد وأخرى في ٦٧ - ظ ثلاثة – وبعبارة أخرى إذا جمعناه مع سابقه مرة ومع تاليه أخرى – ونقصنا من كل واحد من الحاصلين واحداً بقيا فردين أولين . ثم نضرب أحد الفردين الأولين ١٠ في الآخر ليحصل فرد ثالث . فإن كان مجموع الثلاثة فرداً أول ، فمضروب ذلك العدد في الفرد الثالث هو أقل المتحابين وفي مجموع الأفراد الثلاثة أكثرهما.

مثاله : وجدنا الأربعة من تلك التضاعيف صالحة لذلك ، وكان مضروباها في واحد ونصف وفي الثلاثة هما : ٦ و ١٢ ، وبعد نقصان الواحد من كلٍّ بقي ٥ و ١١ الأولان ، < فإذا > ضربنا أحدهما في الآخر حصل ٥٥ وهو ١٥ الفرد الثالث ، ومجموع الأفراد ٧١ وهو فرد أول . فالأربعة في ٥٥ – وهو ٢٢٠ – أقل المتحابين ، وفي مجموع الأفراد الثلاثة – وهو ٢٨٤ – أكثرهما .

فإن لم يكن مجموع الأفراد الثلاثة أيضاً فرداً أول ، فلا يحصل منه المطلوب كالثمانية ، فإن مضروبيْهما في واحد ونصف وفي الثلاثة ١٢ و ٢٤ ، وبعد نقصان الواحد من كلٍّ يبقى ١١ و ٢٣ الأولان ، ومسطحهما ٢٥٣ وهو الفرد ٢٠ الثالث ، لكن مجموع الأفراد الثلاثة وهو ٢٨٧ عدد مركب يعدّه ٤١ سبع

* يسرني أن أشكر محمد جعفر معينفار ، الأستاذ بالمركز القومي الفرنسي للبحوث العلمية ، على مراجعته العبارات الفارسية في هذا النص .

٥ – ومجموع : مجموع //

مرات . فالحاصل من ضرب الثمانية في الفرد الثالث وفي مجموع تلك الأفراد الثلاثة وهما ٢٠٢٤ و ٢٢٩٦ ليسا بعددين متحابين ، فإن < مجموع > أجزاء الأكثر منهما يزيد على الأقل بسبعمائه وعشرين ، وهو الحاصل من كل واحد من السبعة والأحد والأربعين ، ومثليهما ، وأربعة أمثالهما ، وثمانية أمثالهما .

أقول : وقد أخطأ هنا صاحب **المفتاح** وصاحب **كنه المراد** وغيرهما من مهرة في الحساب ، فلم يشترطوا كون مجموع الأفراد الثلاثة أول ، فحسبوا أن هذين العددين متحابان ، وأن أجزاء الأكثر هي : الواحد والاثنان والأربعة والثمانية ونصفه وربعه وثمنه لا غير ، ومجموعها يساوي الأقل .

واستخرج صاحب **كنه المراد** من ٢٥٦ أيضاً عددين حسبهما متحابين ، ووضعهما في لوحٍ وفْقّيٍ ، وغفل عن كون ٧٦٧ – وهو الحاصل بعد نقصان الواحد من ضرب ٢٥٦ في الثلاثة – مركباً يعدّه ٥٩ ثلاث عشرة مرة ، وذلك يقتضي أن يعدّ الأقل ١٣ وأضعافه ، وكذا ٥٩ وأضعافه ، وهي غير أجزائه المساوية للأكثر . ولقد نظمتُ طريق تحصيلهما بهذا الوجه في رباعية .

زوج الزوجي درسه ودر نصف سه زن

بي يك اگر اوّلَنْد يك زان دو فِكن

درهم زن وجمله گر شد اوّل آن زوج

در كلّ سه فرد وحاصل فرد بزن /

سنح لي طريق آخر : نأخذ من سلسلة تضاعيف الستة على نسبة الضعف عددين متواليين إذا نقصنا من كلٍّ منهما واحداً بقيا فردين أولين . فنضرب أحد ذينك الفردين في الآخر فيحصل فرد ثالث . فإن كانت الأفراد الثلاثة جميعاً فرداً ٦٨-و

٤ – أمثالهما : لقد برهن كمال الدين الفارسي على هذه القضية من قبل . انظر " تذكرة الأحباب في بيان التحاب " كَز // ٥ – المفتاح : المقصود : مفتاح الحساب لجمشيد الكاشي . انظره بتحقيق أحمد سعيد الدمرداش ومحمد حمدي الحفني الشيخ ، القاهرة ، ١٩٦٧ ، ص ٢٢٣ – ٢٢٥ ؛ وبتحقيق نادر النابلسي ، دمشق ، ١٩٧١ ، ص ٤٨٤ – ٤٨٨ . والخطأ الذي يشير إليه اليزدي موجود بالفعل ، ولم يتنبّه إليه محققو ودارسو الكاشي / كنه المراد : المقصود : كنه المراد في علم الوفق والأعداد ، لشرف الدين علي اليزدي المتوفى في حدود سنة ٨٥٠ هـ .// ١١ – ثلاث عشرة ثلاثة عشر //

أول نضرب ثلثَ أكثر ذينك العددين المأخوذين ، أو ثلثي أقلهما في الفرد الثالث ليحصل أقل المتحابين وفي الفردين الأولين ، ونزيد الحاصل على الأقل فيحصل أكثرهما .

مثاله : وجدنا ١٩٢ و ٣٨٤ المتواليين من تلك السلسلة صالحين لذلك ، وبعد نقصان الواحد من كلّ يبقى ١٩١ و ٣٨٣ الأولان ، ومسطحهما ٧٣١٥٣ الفرد الثالث . ومجموع الأفراد الثلاثة ٧٣٧٢٧ ، وهو فرد أول . وكان ثلث الأكثر ١٢٨ ، ضربناه في الفرد الثالث ، حصل أقل المتحابيّن ، وهو ٩٣٦٣٥٨٤ ، ثم ضربناه في مجموع الفردين الأولين ، وهو ٥٧٤ ، حصل ٧٣٤٧٢ ، زدناه على الحاصل الأول ، حصل ٩٤٣٧٠٥٦ ، وهو أكثرهما .

وقد نظمت هذه القاعدة أيضاً في رباعية (رباعي) :

كردى چوز شش بنسبت ضعف صعود

مضروب دو چار بي يك اول گر بود

با اولهـا اول بـزن ثلث اخـير

در ثالث واولان كه يابى مقصـود

وأما استخراج أجزاء كلٍّ من المتحابّين : فلأجزاء الأقل نأخذ الواحد وكلاً من الأفراد الثلاثة وأضعافها بعدّة ، يحصل من الواحد ذلك الزوج المعمول عليه ، ولا محالة ، يكون الضعف الأخير للفرد الثالث بهذه العدة نفس العدد الأقل ، فنسقطه ونجمع البواقي .

ففي المثال الأول أخذناها مع أضعافها مرتين ، وأسقطنا الضعف الثاني للفرد الثالث ، فكانت هكذا :

١	٥	١١	٥٥
٢	١٠	٢٢	١١٠
٤	٢٠	٤٤	

ولأجزاء الأكثر : نأخذ الواحد ومجموع الأفراد الثلاثة وأضعاف الواحد إلى ذلك الزوج المعمول عليه وأضعاف مجموع الأفراد الثلاثة ما أمكن ١ ٢ ٧

٢ ٤ ١٤

٤ ٨

ففي المثال الأول أخذنا الواحد وضعفه مرتين و ٧١ وضعفه مرة وهي هذه

١ ٧١

٢ ١٤٢

٤

وفي المثال الأخير هكذا ، والله أعلم ،

أجزاء الأقل				أجزاء الأكثر	
الواحد	الفرد الأول	الفرد الثاني	الفرد الثالث	الواحد	مجموع الأفراد
١	١٩١	٣٨٣	٧٣١٥٣	١	٧٣٧٢٧
٢	٣٨٢	٧٦٦	١٤٦٣٠٦	٢	١٤٧٤٥٤
٤	٧٦٤	١٥٣٢	٢٩٢٦١٢	٤	٢٩٤٩٠٨
٨	١٥٢٨	٣٠٦٤	٥٨٥٢٢٤	٨	٥٨٩٨١٦
١٦	٣٠٥٦	٦١٢٨	١١٧٠٤٤٨	١٦	١١٧٩٦٣٢
٣٢	٦١١٢	١٢٢٥٦	٢٣٤٠٨٩٦	٣٢	٢٣٥٩٢٦٤
٦٤	١٢٢٢٤	٢٤٥١٢	٤٦٨١٧٩٢	٦٤	٤٧١٨٥٢٨
١٢٨	٢٤٤٤٨	٤٩٠٢٤	٩٣٦٣٥٨٤	١٢٨	٩٤٣٧٠٥٦

أما إذا لم تكن الأفراد معلومة ، فننصف كلاً من العددين مرة بعد أخرى إلى أن ينتهى إلى فردٍ ، وهو في الأكثر مجموع الأفراد الثلاثة ، وفي الأقل ثالثها . ونرسم كلَّ نصفٍ تحت منصّفه ، ثم نضع ٢ محاذياً للنصف و ٤ محاذياً لنصف النصف ، وهكذا إلى أن ينتهى إلى محاذاة الفرد للزوج المعمول عليه . فمجموع هذه المرسومات للأكثر أجزاؤه . وأما في الأقل ، فانقص من مضروب ذلك الزوج في الواحد والنصف واحداً ، ومن مضروبه في الثلاثة واحداً ، ليحصل الفردان الأولان ؛ وضَعْهما بإزاء الواحد المرسوم فوق ٢ ، وضعّفها مرة بعد أخرى واضعاً الحواصل يمين الأزواج المرسومة إلى أن ينتهى إلى الزوج المعمول عليه ، فمجموع المرسومات أجزاء الأقل .

وقد نظمت طريق تحصيل الأجزاء في هاتين الرباعيتين (رباعي) :

گر واحد وافراد ثلاثة در اقل — بر نسبت ضعف راني اي شيخ اجل
تا عين اقل برآيد آن اجزا را — كن جمع كه اكثر بدرآيد ز عمل

< أما الآخر فهو > رباعي

٥ نصف ودو ربع وچار از اكثر گير — زين گونه بگير تا بود نصف يذير
اين جملة اجزاست بواحد شده جمع — مثل عــدد اقــل بر مرد ديد

آحاد سلسلة تضاعيف الاثنين أبداً تكون أحــد الأزواج الأربعة على هــذا الترتيب : ٢ ثم ٤ ثم ٨ ثم ١٦ ، فلا يتولد المتحابان مما يكون آحاده ٢ ، ٤ ، لكون آحاد مضروب الثلاثة في الأول ومضروب واحد ونصف في الثاني أبداً
١٠ ستة . وبعد إسقاط الواحد من كلٍّ من الحاصلين يكون آحاد ما بقي خمسة . وما آحاده الخمسة لا يمكن أن يكون أول ، لكون الخمسة عاداً لها ، وكذا ما يكون آحاده ٨ و ١٦ إذا لم يحصل منه فردان أولان كما ذكرنا في المائتين والستة والخمسين ، أو لم يجتمع من أفراده الثلاثة فردان أولان كما ذكرنا في الثمانية . ونحن قد استقرينا فلم نجد عاشرَ الأربعة وهو ألفان وثمانية وأربعون ، وتاليه
١٥ وهو ضعفه ، صالحين لذلك ، لكون الفرد الأول المتولد من الأول مسطح ٣٧ في ٨٣ ،والفرد الثاني المتولد من الثاني مسطح ١١ في ألف ومائة وسبعة عشر ، ولا رابع عَشَرِها ، لكون الفرد الأول المتولد منه مسطح ثلاثة وعشرين في ألفين ومائة وسبعة وثلاثين .

فصــل

٢٠ في تحصيل العددين المتعادلين اللذين يكون < مجموع > أجزائهما متساويين تقسم زوجاً ما بعددين أولين مرة وبأولين آخرين أخرى وتأخذ مسطحيهما . مثاله : قسمنا ١٦ بثلاثة وثلاثة عشر ، وأخذنا مسطحهما ؛ ومرة بخمسة وأحد عشر وأخذنا مسطحهما ، فكان / العددان وهما ٣٩ و ٥٥ متعادلين : أجزاء كل منهما سبعة عشر . ٦٩ - و

٤ - < أما ... فهو > : هناك كلمة أو أكثر مطموسة في المخطوطة .

ابن البناء المراكشي

فصل من «رفع الحجاب عن أعمال الحساب»

بسم الله الرحمن الرحيم

فصل

١٩ - و

٥ وينتفع بجمع المربعات في تركيب الكلمات الثلاثية لحصر اللغات وشبهها، مثل كم كلمة ثلاثية في حروف المعجم بصورة واحدة دون مقلوباتها ؟ لأن الكلمات الثلاثية إنما هي جمع مثلثات ضلع منتهاها أقل من تلك العدة باثنين أبداً. وجمع المثلثات هو بضرب ضلع منتهاها في مسطحي العددين اللذين يليانه بعده وأخذ سدس الخارج ، كما هو العمل في جمع مربعات الأفراد ومربعات
١٠ الأزواج . وكان ذلك كذلك لأن الثنائية بضرب العدة المفروضة في نصف العدد الثاني منها قبلها ، والثلاثية بضرب الثنائية في ثلث الثالث من تلك العدة / قبلها ، ١٩ - ظ والرباعية بضرب الثلاثية في ربع العدد الرابع من تلك العدة قبلها ، والخماسية بضرب الرباعية في خمس العدد الخامس قبلها ، وعلى هذا أبداً تضرب عدد التركيب الذي قبل التركيب المطلوب في العدد الذي بعده من العدة المفروضة
١٥ قبلها مثلُ عدد التركيب المطلوب ، وتأخذ من الخارج الجزء السميّ لعدد التركيب

وعلة ذلك بينة من هذا الباب :

أما الثنائية ، فهو جمع الأعداد على تواليها من واحد إلى العدد الذي قبل العدة المعطاة .

٨ – بضرب : يضرب – ت – / منتّهاها : متنهاها – ت – / مسطحي : مسطح – ت – / يليانه : الحروف غير مميزة تماماً – ت –// ١٠ – وكان : كان – ت ، و –// ١٠ ، ١١ – العدد الثاني منها قبلها : العدة واثنين منها قبلها – ت –// ١٢ ، ١٣ – والرباعية ... الخامس قبلها : ناقصة – ت – // ١٤ – قبل التركيب : قبل المركبيه – ت – / المطوب : المطلوبة – ت – // ١٥ – التركيب المطلوب : التركيبيه المطلوبة – ت – / السمي لعدد التركيب : المسمى هو بالتركيبه – ت – // ١٦ – بينة : ببينة – ت – // ١٧ – من واحد : ناقصة – و – / قبل : قبله – و – // ١٨ – المعطاة : المعطات – و – ؛ كتبها دائماً هكذا وسنكتفي بهذه الإشارة . //

وأما الثلاثية ، فإن كل واحدة من الثنائيات يجتمع منها واحد من بقية العدة فتكون الاقترانات الثلاثية مثلَ ضرب الثنائية في العدة المعطاة إلا اثنين ، وهو العدد الثالث من العدة المعطاة قبلها .

ولما كانت التأليفات في الثلاثية الواحـــدة ثلاث ثنائيات ، لزم من ذلك تكرار الثلاثية ثلاث مرات ، هي ومقلوباتها ؛ مثل أن الألف والباء إذا جمعتا مع الجيم ، كان ذلك كجمع الألف والجيم مع الباء وكجمع الباء والجيم مع الألف . فهذه الثلاثيات الثلاث حاصلها ثلاثية واحدة ، وإنمـــا صارت ثلاثية لأجل ترتيب حروفها الثنائية ؛ فيجب أن يؤخذ ثلث الثنائيات ويُضرب في سائر العدة المعطاة أو يُضرب الثنائية في ثلث سائر العدة .

وأما الرباعية ، ففيها من الاقترانات الثلاثية أربعة ، لأن ثنائياتها ستة وضربها في ثلث الثالث من الأربعة يخرج منه أربعة ، وهو عدد الثلاثيات التي في الأربعة ، كما ذكرناه . فصار يحصل من عدد التركيبات الثلاثية مع كل حرف من باقي العدة المعطاة أربع صور متماثلة لم تختلف إلا بالترتيب فقط ؛ فوجب أخذ الربع من الخارج . وكذلك يلزم في الخماسية تكرار خمس صور ، لأن فيها من الرباعيات خمساً ، لأن التأليفات تسقط في كل تأليف حرفـــاً ، فتكون عدة التأليفات على عدة حروف الكلمة ، فيلزم من هذا أنه إذا وضع جملة عدد وأردنا عدة التراكيب التي تكون فيها بعدة معطاة ، فإنا نضع أعداد الضرب متفاضلة بالواحد يكون أعظمها عدد تلك الجملة وتكون عدتها كعدة التراكيب ثم نضع أعداداً للقسم عليها ، متفاضلة بالواحد ، يكون أعظمها تلك العدة المعطاة وابتداؤها من الواحد ومن الاثنين ، ثم نزيل الاشتراك بين الأعداد الأولى والأعداد الثانية . ومتى فعلنا ذلك تذهب الأعداد الثانية كلها أبداً ، ثم نضرب

١ – منها : فيها – ت – // ٢ – فتكون : فيكون – ت – // ٥ – جمعتا : جمعا – و – // ٦ – كجمع : جمع – ت – / وكجمع : وجمع – ت – // ٧ – الثلاثيات : الثلاثية – ت – // ٩ – الثنائية : الثنائيات – و – // ١٣ – تختلف : يختلف – و – // ١٥ – حرفا : حرف – ت ، و – // ١٦ – فتكون : فيكون – ت – // ١٧ – وأردنا : واردنا عليه – ت – // ١٨ – التراكيب : التركيب – و – // ١٩ – نضع : تضع – ت ، و – / أعداداً : أعداد – ت – // ٢٠ – نزيل : تزيل – ت ، و – // ٢١ – الثانية : التي فيه – ت – / نضرب : تضرب – ت ، و – //

الباقي من الأعداد الأولى بعضه في بعض ، يكون عدة ما في تلك الجملة من تلك التراكيب .

ويلزم من ذلك أن كل عددين متواليين / يُضرب أحدهما في نصف الثاني ، فالخارج هو ما في أكبرهما من التركيبات الثنائية ، وهو مثلث أصغرهما ، ٥ كما تقدم . ٢٠-و

وكل ثلاثة أعداد متوالية يُضرب أحدهما في نصف الثاني ، وما خرج في ثلث الثالث فالخارج هو ما في أكبرها من التركيبات الثلاثية ، وهو ما يجتمع من المثلثات على تواليها إلى مثلث العدد الأصغر ، وهو مثل جمع مربعات الأفراد المتوالية من الواحد إلى الأصغر إن كان فرداً ، أو مثل جمع مربعات الأزواج ١٠ المتوالية من الاثنين إلى الأصغر إن كان زوجاً ، كما ظهر لك بالاستقراء . ولهذا وجب من العمل في جمع مربعات الأفراد ومربعات الأزواج ما ذكرناه في الكتاب .

ويلزم عن ذلك ما وجد بالاستقراء في جمع المربعات المتوالية التي تقدم ذكرها ، فيكون لأجل ذلك الاستقراء متلازما .

١٥ وأما التأليفات التي تحصل في الصورة الواحدة على القلب في عدة معطاة ، فنفرض أعداداً متوالية من اثنين أو من الواحد يكون آخرها مثل تلك العدة المعطاة ، ثم نركبها بالضرب ، تخرج أشخاص التركيبات من تلك العدة الواحدة على القلب ؛ لأن الحرفين فيهما صورتان : صورة وقلبها ؛ فإذا أضيف إليهما حرف ثالث ، كان مع كل واحدة من الصورتين : إما أولاً ، وإما وسطاً ، ٢٠ وإما آخراً ، فتلك ست صور . فإذا أضيف إليها حرف رابع كان مع كل

١ – من الأعداد : من العداد – و – // ٢ – التراكيب : التركيبه – ت – التركيب – و – // ٣ – يضرب : بضرب – ت – // ٤ – التركيبات : التأليفات – ت – // ٧ – أكبرها : أكبرهما – ت ، و – // ٨ – الأفراد : الأزواج – ت – // ١١ – الأزواج : من الأزواج – ت – // ١٣ – التي : الذي – و – // ١٤ – ذكرها : ذكره – و – // ١٥ – تحصل : يحصل – و – / على القلب : ناقصة – ت – // ١٦ – فنفرض : ناقصة – ت – / أعداداً : من اعداد – ت – // ١٧ – نركبها : تركبها – و – // ١٨ – وقلبها : وقبلها – ت – // ١٩ – واحدة : واحد – ت – // ٢٠ – ست : ستة – و – / فإذا : وإذا – و – //

صورة من تلك الست : إما أولاً ، وإما ثانياً ، وإما ثالثاً ، وإما رابعاً . فتلك أربع وعشرون صورة للرباعية الواحدة . فالثنائية اثنان ، والثلاثية من ضرب اثنين في ثلاثة ، والرباعية من ضرب اثنين في ثلاثة في أربعة ، كذلك على القياس فيما بعد ذلك . وظاهر من ذلك أن مسطح كل عددين متواليين هو ما في ٥ أكبرهما من الثنائيات وقلبها ؛ وأن مسطح ثلاثة أعداد متوالية هو ما في أكبرها من الثلاثيات وقلبها ؛ وأن مسطح أربعة أعداد متوالية هو ما في أكبرها من الرباعيات وقلبها ؛ وكذلك على هذا ما بعد ذلك .

فإن أردنا عده الحروف المتوالية الجامعة لتلك الصور ، فنكرر حروف صورة منها بقدر عدة حروفها إلا واحداً ، وتزيد أول حرف منها ؛ فتكون ١٠ تضرب أبداً عدة حروف صورة في مثلها إلا واحداً وتزيد واحداً .

وبهذا تعمل في مسألة من نسي مثلاً أربع صلوات مختلفة ، كلُّ صلاة من يوم ولا يدري أيتها قبل الأخرى ، فإنه يصلي ثلاث عشرة صلاة : يصلي أربعاً يرتبها كيف شاء ، ثم يعيدها بعينها على ترتيبها مرة أخرى ، ثم يعيدها كذلك مرة ثالثة ، ثم يعيد التي ابتدأ بها . ظهر ذلك / من الاستقراء . ٢٠ - ظ

١٥ وتركت من هذا الباب أعداد الوفق والأعداد المتحابة ، فإنه لا جدوى لها في العلوم ، مع طولها واختلاف عمالها .

١ – الست : الستة – و – // ٥ – وقلبها : وقبلها – ت – // ٦ – وقلبها : وقبلها – ت – // ٦ – وأن مسطح : ومسطح – ت – // ٧ – وقلبها : وقبلها – ت – // ٨ – الصور : الصورة – ت – / فنكرر : فكرر – و – كرر – ت – // ٩ – صورة : الصورة – ت – / فتكون : فيكون – ت –// ١٠ – مثلها : مثله – ت – / وتزيد واحداً : ناقصة – ت // ١٢ – ثلاث عشرة : ثلاثة عشر – ت ، و – // ١٤ – مرة ثالثة : ثالثة – و – // ١٦ – العلوم : المعلوم – ت – //

بســم الله الرحمــن الرحــيم

الفصل الرابع

في إيجاد الأعداد المتحابة من أعداد زوج الزوج

إذا أردت ذلك فضع أعداد زوج الزوج ما شئت منها في سطر مبتدأة
٥ من الواحد ، وكأنها : واحد واثنان وأربعة وثمانية وستة عشر واثنان وثلاثون ؛
وجمعنا منها ما قبل الثمانية مثلاً ، وحفظناه وذلك سبعة ؛ ثم تزد على هذه
السبعة آخر الأعداد التي جمعنا ، يكون المجتمع أحــد عشر ؛ وتنقص مــن
السبعة العدد الذي قبل آخر ما جمعنا ، وذلك < اثنان > من سبعة يبقى خمسة ،
فهذه الخمسة والأحد عشر كلٌ واحد منها عدد أول ؛ فتضرب أحدها في الآخر
١٠ يخرج خمسة وخمسون ، تضربه في آخر الأعداد التي جمعنا ، يجتمع من ذلك
مائتان وعشرون ، وهو أحد العددين المتحابين ؛ فاحفظه . ثم تأخذ العدد الذي
يلي آخر الأعداد التي جمعنا إلى جهة الكثرة ، وذلك ثمانية ؛ وتأخــذ الرابع من
الثمانية إلى جهة أول المراتب في القلة ، وهو واحد ؛ فتجمعه مع الثمانية وتضرب
المجموع في الثمانية يكون الخارج اثنين وسبعين ، فتسقط واحداً منه يبقى أحد
١٥ وسبعون ، وهو عدد أول ؛ فيصح خروج العدد منه بأن تضربه في آخر الأعداد
التي جمعنا أولاً ، وذلك في أربعة ، يكون الخارج مائتين وأربعة وثمانين ، وهو
العدد الثاني من العددين المتحابين .

فعددا مائتين وعشرين ومائتين وأربعة وثمانين عددان متحابان . ولا
يمكن استخراج عددين متحابين أقل من هذين العددين ، وهما أولاً الأعــداد
٢٠ المتحابة ، وأحد هذين العددين زائد والآخر ناقص ، ولا يكونان إلا كذلك :
أحدهما زائد وهو العدد الأول والآخر ناقص ؛ ومقدار زيادة الزائد عليه كمقدار
نقصان الناقص منه ؛ والزيادة والنقصان كلٌ واحد منهما مساوٍ لفضل مابين العددين ،
فيكون لذلك إذا جمعنا أجزاء الزائد كلها اجتمع منها مثل العدد الناقص ؛

١٢ – الأعداد : العداد // ٢٠ – هذين : هاذين // .

٦٩ وإذا / جمعنا أجزاء العدد الناقص كلها اجتمع منها مثل العدد الزائد . فبهذا الاعتبار قيل فيهما متحابان ، والعدد الناقص هو الأكثر أبداً ، والزائد هو الأقل .

اعلم أنه إن لم يكن كلُّ واحدٍ من تلك الأعداد التي هي الخمسة والأحد عشر والواحد والسبعون عدداً أول ، تجاوزنا بالجمع في أعداد زوج الزوج إلى ٥ الثمانية ، فيجتمع الثمانية مع السبعة ، وتعمل العمل المذكور ، والذي يجتمع خمسة عشر ، فتزيد عليها آخر الأعداد التي جمعت ، وهـو ثمانية ، يكون المجموع ثلاثة وعشرين ، وهو عدد أول ؛ ثم تنقص من الخمسة عشر العدد الذي قبل آخر ما جمعت وهو أربعة ، يبقى أحد عشر ؛ فالأحد عشر والثلاثة ١٠ والعشرون كلٌّ واحد منها عدد أول ؛ فتضرب أحدهما في الآخر ، يجتمع لك مائتان وثلاثة وخمسون ، فتضربها في ثمانية — آخر الأعداد التي جمعت — يجتمع من ذلك ألفان وأربعة وعشرون ، وهو أحد العددين المتحابين إن صح الشرط الثالث . ثم تأخذ العدد الذي على آخر الأعداد التي جمعنا إلى جهة الكثرة ، وهو ستة عشر ، وتأخذ الرابع منه إلى جهة أول المراتب وهو اثنان ، فجمعت مع الستة ١٥ عشر فيكون ذلك ثمانية عشر ، فتضربها في الستة عشر يكون مائتين وثمانية وثمانين ، فتسقط منها واحداً ، يبقى مائتان وسبعة وثمانون ، وهو عدد مركب ليس من الأعداد الأول ، فلا يخرج به العدد الثاني ، فيبطل العدد الأول .

ثم تتجاوز بالجمع إلى الستة عشر ، وتعمل بها ما ذكر حتى تصح لك الشروط الثلاثة . ولو جمعت الستة عشر مع ما قبلها ، وعملت العمل المذكور ٢٠ لخرجت لك الأعداد الثلاثة المشترط فيها البساطة ، كلٌّ واحد منها عدد أول . فالأول منها سبعة وأربعون ، والثاني ثلاثة وعشرون ، والثالث ألف ومائة وأحد وخمسون ، وكل واحد منها عدد أول — ، ويخرج لنا أحد العددين المتحابين سبعة عشـــر ألفاً ومائتان وستة وتسعون ، والآخر ثمانية عشر ألفاً وأربعمائة وستة عشر ، وهو العدد الناقص . وهذان العددان هما اللذان يليان العددين ٢٥ الأولين على الطبيعة ، وليس بينهما عددان متحابان ؛ فاعلمه .

وإن شئت : في السبعة التي هي مجموع الواحد والاثنين والأربعة ضربتها

٤ — إن : من // ٥ — أول : أولا // ٨ — عشرين : عشرون // ١٢ — الذي : التي //
١٦ — مائتان : مائتين / وثمانون : وثمانين // ٢٤ — وهذان : وهاذان //

في الرابع ، وهو ثمانية ، ونقصت من الخارج أول الأعداد ، وهو واحد ،
وضربت الباقي وهو خمسة وخمسون في الثاني من الرابع قبله ، وهو أربعة ،
يخرج لك العدد الزائد . وإن شئت ضربتها في الخامس وهو ستة عشر ونقصت
من الخارج العدد الثاني ، وضربت الباقي وهو مائة وعشرة / في الثالث من الرابع ٧٠
٥ قبله ، وذلك في اثنين ، يخرج لك العدد الزائد . وإن شئت ضربتها في السادس،
وذلك في اثنين وثلاثين ، ونقصت من الخارج الثالث من الأعداد وهو الرابع
من العدد المضروب فيه إلى جهة القلة ، وضربت الباقي، وهو مائتان وعشرون،
في العدد الرابع من الرابع قبله وذلك في واحد ، يخرج المطلوب ، وهذه وجوه
كلها تخرجك إلى العدد الزائد من المتحابين .

١٠ وأما العدد الناقص منها فتجمع واحداً أبداً إلى الرابع يجتمع لك تسعة ،
فهذه التسعة أصل لإخراج العدد الناقص كما كانت السبعة الباقية من الثمانية
بعد إسقاط واحدٍ منها أصلاً لإخراج العدد الزائد . وإن شئت في هذه التسعة
ضربتها في الرابع نفسه ونقصت من الخارج أول الأعداد ، وضربت الباقي ،
وهو واحد وسبعون ، في الثاني من الرابع قبله ، وذلك في أربعة ، يخرج لك
١٥ العدد الناقص ، وذلك مائتان وأربعة وثمانون . وإن شئت ضربتها في الخامس ،
وذلك ستة عشر ، ونقصت من الخارج ثاني الأعداد ، وضربت الباقي ، وهو
مائة واثنان وأربعون ، في الثالث من الرابع قبله وذلك في اثنين ، يخرج المطلوب
وإن شئت ضربتها في السادس وهو اثنان وثلاثون ، ونقصت من الخارج ثالث
الأعداد ، وضربت الباقي في الرابع من الرابع قبله ، يخرج لك المطلوب . فهذه
٢٠ وجوه كلها تخرجك إلى العدد الناقص من العددين المختلفين .

وإن شئت في استخراج العدد الناقص أيضاً ، فاضرب السبعة التي كانت
باقية من العدد الرابع أولاً في مجموع الثاني والرابع ، وذلك في عشرة ، وتزيد
على الخارج أول الأعداد ، وهو واحد ، وتضرب المجموع ، وهو واحد
وسبعون ، في الثاني من الرابع قبله ، وذلك في أربعة ، يخرج لك المطلوب . وإن
٢٥ شئت فاضربها في مجموع الثالث والخامس ، وذلك في عشرين ، وتزيد الثاني
من الأول على الخارج ، وتضرب المجموع في الثالث من الرابع قبله ، وذلك في

٣ – ضربتها : الضمير يعود على السبعة //

اثنين ، يخرج المطلوب . وإن شئت فاضربها في مجموع الرابع والسادس ، وتزيد على الخارج الثالث من الأعداد ، وتضرب المجموع في الرابع من الرابع قبله ، وذلك في واحد ، يخرج المطلوب . فهذه أيضاً وجوه كلها تخرجك إلى العدد الناقص من العددين المتحابين .

٥ وأما ما يخرجك إلى الزائد بهذا العمل ، فإنك تضرب التسعة ، التي كانت أصلاً لاستخراج العدد الناقص في العمل الأول ، في الفضل بين الثاني والرابع ، وذلك في ستة ، وتزيد على الخارج أول الأعداد ، وتضرب المجموع ، وهو خمسة وخمسون . في الثاني من الرابع قبله ، وذلك في أربعة ، يخرج لك المطلوب . وإن شئت فاضربها في الفضل بين الثالث والخامس ، وذلك في اثني عشر ، ١٠ وتزيد الثاني من الأول على الخارج وتضرب المجموع في الثالث / من الرابع ، ٧١ وذلك في اثنين ، يخرج المطلوب .

وإن شئت فاضربها في الفضل بين الرابع والسادس ، وذلك في أربعة وعشرين ، وتزيد على الخارج الثالث من الأعداد ، وتضرب المجموع في الرابع من الرابع قبله ، وذلك في واحد ، يخرج المطلوب . في هذه أيضاً وجوه كلها ١٥ تخرجك إلى العدد الزائد من العددين المتحابين .

وإن شئت استخراجهما معاً ، فخذ العدد الرابع وزد عليه واحداً ، يكن تسعة ، وانقص منه واحداً ، يكن سبعة ، ثم اضرب كل واحد من السبعة والتسعة في الثمانية ، وانقص من كل واحد من الخارجين واحداً ، يبقى للتسعة أحد وسبعون وللسبعة خمسة وخمسون . فاضرب كل واحد منهما في العدد الثاني من ٢٠ الرابع قبله إلى جهة القلة ، يخرج لك العددان المطلوبان . أو تضرب كل واحد من السبعة والتسعة في الخامس ، وتنقص من كل واحد من الخارجين اثنين ، وتضرب باقي كل واحد في اثنين ، وهو العدد الثالث من الرابع قبله ، يخرج المطلوب . أو تضرب كل واحد من السبعة والتسعة في السادس ، وتنقص من كل واحد من الخارجين العدد الثالث ، وتضرب باقي كل واحد في العدد الرابع ٢٥ من الرابع ، وهو الأول ؛ فاعلم ذلك . وإن شئت أيضاً في إيجاد هذين العددين ،

٣ – يخرج : تخرج // ٦ – المجموع : بالمجموع // ١٧ – اضرب : اتضرب //
٢٠ – المطلوبان : المطلبان // ٢٥ – هذين : هاذين //

فرضت عددين متواليين من أعداد زوج الزوج ، وكأنها أربعة وثمانية ، فتجمعها يكون اثني عشر ، فتأخذ نصفه : ستة ، فتضربها في المجموع ، يكون اثنين وسبعين . فتحصل لك بهذا العمل ثلاثة أعداد : الستة والاثنا عشر والاثنان والسبعون . فتسقط من كل واحد منها واحداً ، فإن بقي كلُّ واحد منها عدداً أول ، فقد تم ما أردنا ، وذلك خمسة وأحد عشر وأحد وسبعون ، كل واحد منها عدد أول . ولولم يخرج كل واحد منها عدداً أول ، لتخطينا العددين المفروضين إلى ما يليهما بعدهما ، ثم تضرب أول الأعداد الثلاثة في ثانيها ، يكون الخارج خمسة وخمسين ، فهذا أصل العدد الزائد ؛ والمحفوظ الثالث ، وهو الواحد والسبعون ، هو أصل العدد الناقص . ثم تضرب كل واحد من الأصلين في أصغر العددين المفروضين ، وذلك في أربعة ، فيكون العدد الزائد مائتين وعشرين والناقص مائتين وأربعة وثمانين ؛ وذلك ما أردنا .

ولو أخذنا الثمانية والستة عشر لما صح بهما العمل .

ولو أخذنا الستة عشر والاثنين والثلاثين ، لصح بهما العمل ، وكان العدد الزائد والناقص على ما ذكرنا فيما تقدم ؛ فاعلم ذلك ، وانه الموفق .

وأما البرهان على جميع هذه المسائل فلست أذكره في هذا الموضع لطوله وتشعبه ولكونه برهاناً على ما هو خارج الكتاب الذي تهدّينا لشرحه ، ومع أنني أذكره إن شاء الله في مقالة منفردة بهذا العمل ، وألخص فيها جميع ما ذكره المؤتمن / وذلك في الفصل الرابع من الجنس الخامس من كتابه ، وأذكر فيها جميع خواص هذه الأعداد ، وما ذكر أهل العلم فيها من الأسرار الروحانية والتناسبات العددية .

٢ – اثني عشر : اثنا عشر ، وهو جائز ، ولكنه يأخذ عادة بالنصب // ٣ – والاثنا عشر : والاثني عشر // ٤ – والسبعون : والسبعين / منها : منهما // ٥ – أول : أولا // ٦ – منها : منهما / منها : منهما / عدداً : عدد / أول : أولاً // ١٨ – المؤتمن : المؤتمن ، والمقصود هنا : ابن البناء المراكشي في كتابه « تلخيص أعمال الحساب » //

Matériaux Pour

L'Histoire des Nombres Amiables

et de L'Analyse Combinatoire.

nous en avons joint deux autres. Dans le premier, d'al-Tanūkhī (1307), on rencontre un calcul du couple de Fermat; mais comme l'auteur y reprend des résultats connus, pour composer un traité manifestement destiné à l'enseignement, et non à l'exposé de découvertes, tout ceci laisse penser que le couple de Fermat était très vraisemblablement connu avant la fin du XIIIème siècle.

Viennent ensuite deux courts chapitres du traité d'al-Yazadī, "Les sources de l'arithmétique", on y trouve, avant Descartes, (de peu, il est vrai), le calcul du couple de nombres amiables qui porte le nom de ce dernier.

Quant au dernier texte, un chapitre du *Commentaire* d'Ibn Haydūr (mort en 1413) de *Talkhīṣ aᶜmāl al-Ḥisāb* d'Ibn al-Banā', son principal intérêt est de montrer que le couple de Fermat n'a pas cessé d'être transmis, pour devenir l'héritage commun des mathématiciens tardifs.

Nous établissons donc, dans l'ordre:

1- Kamāl al-Dīn al-Fārisī : "*Mémoire aux amis pour démontrer l'amiabilité*".

2- Al-Tanūkhī : un paragraphe de son "*Traité en arithmétique*".

3- Al-Yazadī : deux chapitres de son "*Sources de l'arithmétique*".

4- Ibn al-Banā' : un chapitre de son commentaire de sa propre arithmétique, "*Les dévoilement de* "*Talkhīṣ aᶜmāl al-Ḥisāb*" ". Sur l'établissement de ces textes, nous nous sommes expliqués dans l'Introduction arabe.

5- Ibn Haydūr : un chapitre de son Commentaire de *Talkhīṣ aᶜmāl al-Ḥiāsb* d'Ibn al-Banā'.

la théorie des nombres. Sans être encore purement arithmétique, il n'est plus cependant géométrique, et adopte de plus en plus d'aspects conbinatoires et algébriques. Il ne faut pas oublier en effet qu'al-Fārisī, parfaitement informé de l'algèbre arithmétique selon la tradition d'al-Karajī et de son école, comme le laisse voir son grand commentaire du traité d'Ibn al-Khawām al-Baghdādī, procède en théorie des nombres au moyen de cette algèbre. Or c'est précisément ce style qui caractérisera la théorie des nombres jusqu'en 1640 au moins, même s'il demeure quelques survivances d'une terminologie et d'une représentation des nombres encore liées à la conception euclidienne.

Par ailleurs, plus encore que par les règles combinatoires qu'il comprend, le mémoire d'al-Fārisī s'impose en ce domaine par l'interprétation délibérément combinatoire des éléments du triangle arithmétique, et par l'usage qui est fait de ce dernier pour le calcul des ordres numériques. Afin d'évaluer, dans l'état actuel de notre connaissance, la distance parcourue, nous confrontons le mémoire d'al-Fārisī au texte, établi ici, de l'un de ses contemporains : Ibn al-Banā' (mort en 1321). Si cette étude n'atteint pas, de toute évidence, la généralité de celle d'al-Fārisī, elle laisse cependant penser qu'elles ont pu, l'une comme l'autre, profiter d'une longue tradition de travaux combinatoires. La connaissance que nous avons de cette tradition ne s'appuie encore que sur des témoignages tardifs, que nous reprendrons dans un prochain article. Nous nous contenterons, pour l'heure, d'en rappeler un, déjà évoqué ici, celui d'al-Yazadī[1]. On ne manquera pas alors de constater que l'analyse combinatoire s'est déjà constituée en un chapitre dont le souci de précision terminologique exprime la volonté d'autonomie.

Parmi les principaux résultats, on trouve:

$$(n)_r = n(n-1) \dots (n-r+1),$$

$$(n)_n = n! \quad ,$$

$$A_n^r = n^r \quad ,$$

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)r}{r!} \quad ,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \cdot$$

A ces deux textes, le mémoire d'al-Fārisī et le chapitre d'Ibn al-Banā'.

1. Voir al-Yazadī : *Sources de l'arithmétique*; mss no 1993, E. Hazinesi, Suleymania, Istanbul, ff. 97v - 99r.

Matériaux Pour L'Histoire des Nombres Amiables et de L'Analyse Combinatoire.

Roshdi Rashed

Les cinq textes que nous établissons ici, et qui tous étaient jusqu'à présent inédits, modifieront sans aucun doute notre connaissance de l'histoire de la théorie élémentaire des nombres, et de l'analyse combinatoire. Il apparaît en effet à leur lecture que de nombreuses découvertes, jusqu'ici attribuées à des mathématiciens du XVIIème siècle, si ce n'est plus tardifs encore, sont le fait de leurs prédécesseurs du XIIIème siècle. Ainsi plusieurs propositions, que l'histoire a baptisées des noms de Descartes, Montmort, l'abbé Deidier, entre autres, et qui se rapportent aux fonctions arithmétiques élémentaires, avaient déjà été énoncées et démontrées par Kamāl al-Dīn al-Fārisī, (mort en 1320 environ). D'autres, essentielles, sur l'analyse combinatoire, "l'usage du triangle arithmétique pour les ordres numériques", selon la fameuse expression de Pascal, apparaissent déjà elles aussi dans le mémoire du mathématicien du XIIIème siècle. C'est afin d'établir ces propositions qu'al-Fārisī dut s'assurer que tout nombre se décompose, et d'une manière unique, en un nombre fini de facteurs, énonçant ainsi le théorème fondamental de l'arithmétique, dont il tentait la démonstration. Encore faut-il ajouter à cela le calcul du couple de nombres amiables communément attribué à Fermat.

A peine évoqués, ces résultats suffisent à manifester l'importance de la contribution d'al-Fārisī à la théorie des nombres, c'est-à-dire à l'étude des parties aliquotes, des diviseurs, des nombres figurés et des fonctions arithmétiques élémentaires; aussi bien qu'à l'analyse combinatoire, dont l'intervention s'est alors imposée.

Nous n'entendons pas résumer ici ce que nous avons décrit ailleurs[1] en détail; il nous faut simplement rappeler que cette recherche fut suscitée par une autre, de portée plus restreinte certes: la re-démonstration, selon d'autres voies, d'un théorème de Thābit b. Qurra sur les nombres amiables, déjà prouvé par son auteur dans le meilleur style euclidien.

Non moins important que ces découvertes est le nouveau style que revêt

1. Voir R. Rashed: "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIIIème et XIV ème siècles", *Archive for History of Exact Sciences*", vol. 28, n°2, pp. 107-174, 1983; et "Remarques sur l'histoire de la théorie des nombres dans les mathématiques arabes", *Proceedings of the 16th international Congress of the history of Science* (1981), Meetings on specialized topics, pp. 255-261.

القبيصي

صاحب الرسالة في جمع أنواع من الاعداد
(آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ص ٨٥ب – ٨٨أ)

عادل أنبوبا

قد يكون من المفيد أن نجمع هنا بعض المعلومات عن **القبيصي** ، صاحب الرسالة التي ننشرها « **في جمع انواع من الأعداد** » ، وهي معلومات متناثرة في مراجع شتى .

ترجمة القبيصي

اسمه : ابو صقر عبد العزيز (او عبد الرحمن) بن عثمان بن علي القبيصي الهاشمي . والقبيصي نسبة إلى قرية القبيصة ، يقول ياقوت الحموي في معجم البلدان[1] : « القبيصة قرية من اعمال شرقي مدينة الموصل بينهما مقدار فرسخين ، والقبيصة ايضاً قرية اخرى قرب سامراً . وإلى واحدة منهما ينسب أبو صقر القبيصي المنجم ».

حياته : جل ما نعرفه عن حياته ما جاء في الفهرست لابن النديم . قال ابن النديم في معرض كلامه عن خزانة كتب علي بن احمد العمراني الرياضي الموصلي المتوفى سنة ٣٤٤ ه : « واحد غلمانه ابو صقر القبيصي ويقرأ عليه المجسطي في زماننا »[2] . فيكون حسب تحصيلنا ان مولد القبيصي لا يتأخر عن نحو سنة ٣٢٥ ه . وكان ابو صقر لا يزال يدرس المجسطي في زمن تحرير الفهرست وهو سنة ٣٧٧ ه .[2] وقد عيّن الزركلي سنة وفاته نحو ٣٨٠ ه وهو أمر جائز ونظنه تقديرا منه اذ ان المراجع المعروفة لا تذكر سنة لوفاته ولميلاده . وتبـع قول الزركلي عمر كحالة وابراهيم خوري[3] . ويستفاد من مقدمات بعض مؤلفات القبيصي انه عاش في كنف سيف الدولة – امير حلب من سنة ٣٣٣ إلى ٣٥٦ ه –[4] واليه اهدى

١ – ياقوت الحموي ، معجم البلدان ، ج ٤ ، بيروت ١٩٥٧ ، ص ٣٠٨ .

٢ – ابن النديم ، الفهرست ، القاهرة دون تاريخ ، ص ٣٨٥ . ينقل ابن القفطي عن ابن النديم قوله ويعين زمن الفهرست بسنة ٣٧٠ ه وهو خطأ قد يكون من ناسخ اهمل لفظة سبع . (ابن القفطي – أخبار الحكماء ، القاهرة ١٣٢٦ ه ، ص ٤٧) .

٣ – الزركلي ، الاعلام ، طبعة ثانية ، ج ٤ ، ص ١٤٦ . وعمر كحالة ، معجم المؤلفين ، دمشق ١٣٧٧ / ١٩٥٨ ، ج ٥ ، ص ٢٥٢ . وابراهيم خوري ، فهرس مخطوطات دار الكتب الظاهرية ، علم الهيئة وملحقاته ، دمشق ١٣٨٩ / ١٩٦٩ ، ص ٢٢ .

٤ – يأتي في سياق المقال .

ابو صقر بعض كتبه ، ووجود القبيصي في بلاط سيف الدولة قد يخلص ايضاً من ترجمة سيف الدولة في وفيات الاعيان لابن خلكان[5] . وشوهد القبيصي في حلب يوما امام القنطرة التي على باب انطاكية ، ومعه رجل ينقل له كتابة باليونانية كانت في القنطرة ، وكان فيها طالع المدينة .[6] ولا شك انه انتقل بعد وفاة سيف الدولة أو قبلها إلى عاصمة من العواصم كبغداد ، وهو الارجح ، أو إلى الموصل وتابع التدريس ، كما قال ابن النديم ، والنجامة .

مؤلفـــاته*

١ **المدخل إلى صناعة احكام النجوم**[7] ، وهو مهدى إلى الامير سيف الدولة ، منه مخطوط في القاهرة . نأخذ عن فهرست الكتبخانة الخديوية ج ٥ ، القاهرة ١٣٠٧ —

* : جمعنا في آخر الترجمة المصادر الغربية مع الاختصارات الدالة عليها

٥ — ابن خلكان ، وفيات الاعيان ، تحقيق محمد عبد الحميد ، القاهرة ١٩٤٨ ، ج ٣ ، ص ٧٩ ، عدد ٤٥٤ .

٦ — ابن شداد ، الاعلاق الخطيرة ، جزء اول قسم اول ، دمشق ١٩٥٣ ، ص ١٢ .

٧ — [Brockelmann] ، كرلو نلّينو ، علم الفلك عند العرب ، روما ١٩١١ ، ص ٢١١ .

لا نعلم على وجه الضبط سنة تأليف " المدخل الى صناعة احكام النجوم " وغيره من المؤلفات الموضوعة برسم سيف الدولة ، وليس في ضبط تاريخها كبير حاجة بعد ان حصرناها في حقبة ٣٣٣ — ٣٥٦ ه . إلا ان الامعان في وقائع امارة سيف الدولة على ما له من الفائدة التاريخية قد يساعد على تضييق الحقبة المذكورة . فنقول : لما دخل سيف الدولة حلب سنة ٣٣٣ اندلعت الحرب بينه وبين اخشيد مصر وكانت سوريا تابعة له فغلب سيف الدولة على حلب مرتين ثم حل الصلح واستقر له الحكم فيها في ربيع ٣٣٦ واخذ يبني لنفسه خارج المدينة قصرا فخما يطاول به قصر معز الدولة البويهي ببغداد ، وكان لقصر سيف الدولة سور يدور عليه من ستة الاف ذراع او سبعة ، ويدخله من احد ابوابه المشبك بالحديد نهر شق من قويق كان لا يزال إلى سنة ١٩٤٠ م ، يسقي البساتين . (Sauvaget, p. 101) . وكان القصر يتسع لسيف الدولة وحاشيته وللمئات من الغلمان ولألفي بعير والف واربعمائة بغل ما عدا الخيل والآلات الكثيرة والسلاح والمتاع والاموال (Canard ff. 654-656) . والتف حول سيف الدولة الكثير من الوجهاء والقضاة والعلماء والشعراء واللغويين والاطباء والمنجمين واقبل الدهر عليه سنوات . ثم عاد فادبر حول ٣٥٠ ه اذ قويت شوكة البيزنطيين ودبت عقارب الفتن والمؤامرات في الداخل واصيب سيف الدولة بفالج نصفي .(Canard, pp. 648-649) . وفي شتاء ٣٥١ ه هاجم نقفور فوقاس مدينة حلب على حين غفلة فدخلها غرة وكسر سيف الدولة شر كسرة ونهب قصره واحرقه ، ولم يعد بناء القصر وقل حضور سيف الدولة الى حلب (انظر ابن الجوزي المنتظم ، ج ٢٧ حيدر آباد ١٣٥٨ ه ، ص ٨ . ابن العديم ، تاريخ حلب ، تحقيق سامي الدهان ، ج ١ / دمشق ١٣٧٠ / ١٩٥١ ، ص ١٢٧ و١٣٨ — ١٣٩ . ابن شداد ، الاعلاق الخطيرة ، ص ١٦ ، ٢٩ . (Carnard pp. 809-819, 658. Sauvaget p. 101) . ثم توالت على سيف الدولة الاسقام والاحزان والمصائب وتضعضعت احواله وقلت امواله وتوفي في صفر ٣٥٦ (Canard pp. 659-669) ويتضح مما سبق ان الاحتمال اقوى ان يكون القبيصي قد وضع مؤلفاته بين ٣٣٧ و ٣٥٠ ه اي في سني الاقبال .

١٣٠٨ هـ ، ص ٣١٦ ، ما يلي : « رتبة على خمسة فصول . الأول : في أحوال فلك البروج . الثاني : في طبائع الكواكب السبعة . الثالث : فيما يعرض لها . الرابع : في تفسير مسميات * المنجمين . الخامس : في جمل السهام .

يحفظ من الكتاب عدة مخطوطات منها في استنبول ، فاتح ٣٤٣٩ ، ٢٠ ، ص ١٥٠أ– ١٦٢أ ، سنة النسخ ٥٨٧ هـ .

ويقول حاجي خليفة في كشف الظنون في باب مدخل : ١ المدخل إلى علم النجوم بعض الافاضل . اوله : الحمد لله الملك الحق المبين * الخ ، ألفه لسيف الدولة ، وجمع فيه من اقاويل المتقدمين كلما يحتاج اليه في الصناعة وجعله على خمسة فصول . الاول في احوال الفلك والبروج * . الثاني في طبائع الكواكب السيارة . الثالث فيما يعرض لها . الرابع في تفسير سمات المنجمين . الخامس في السهام .[8]

المدخل إلى علم النجوم لعبد العزيز بن عثمان القبيصي . اوله : الحمد لله الملك المبين الخ . جعله على خمسة فصول .[9]

* : كذا في الاصل .

٨ – [Krause] ثم إنا نشير الى مخطوط آخر لمدخل القبيصي لم يذكره بروكلمان وقد ذكره زكريا يوسف، مؤلفات الكندي الموسيقية ، بغداد ، ١٩٦٢ ، ص ١٧ : Bodleian Oxford March 663, 1°, pp. 2-47. .

٩ – حاجي خليفة ، كشف الظنون ، طبعة استنبول ، ج ٢ ، ١٩٤٣ ، عمود ١٦٤٢ . وتبع حاجي خليفة في دعواه ، الغزاوي في تاريخ علم الفلك في العراق ، بغداد ١٩٥٨ ، ص ١٢٥ ونذكر مقدمة المدخل كما وردت في مخطوط اكسفورد ، مع شكرنا لادارة المكتبة .

بسم الله الرحمن الرحيم رب اعن برحمتك

الحمد لله رب العالمين الملك الحق المبين . اما بعد مسئلة لله عز وجل اطالة بقاء مولانا الامير سيف الدولة ودوام عزه وحراسة نعمه وامتداد دولته ، واني لما رأيت جماعة من المتقدمين في صناعة احكام النجوم قد عملوا كتباً سموها مدخلا[1] الى هذه الصناعة ، فبعض لم يستقص على جميع ما يحتاج اليه فيها مما يصلح ان يكون مدخلا ، وبعض طول فيما اتى به فيما لا يحتاج اليه فضاع فيه ما يحتاج اليه ، وبعض لم يسلك في ترتيبه طريق التعليم ؛ ألفت هذا الكتاب وجعلته مدخلا وجمعت فيه من اقوال المتقدمين كل ما يحتاج اليه في الصناعة على سبيل المدخل ، ولم احضر الاجماع على ما جئت به ، اذ كان ذلك في كتاب بطلميوس المعروف بالاربعة . وفي كتاب اثبات صناعة الاحكام النجومية ونقض رسالة علي بن عيسى في ابطالها ، من الاحتجاج ، ما فيه غنى[2] عن ذلك . وجعلته خمسة فصول . الفصل الاول**: في احوال فلك البروج الذاتية والعرضية . الفصل الثاني : في طبايع الكواكب السبعة وما يختص به [كل واحد منها] وما يدل عليه [من الاحوال] . الفصل الثالث : فيما يعرض للكواكب ←

١ – مداخلا ٢ – غنا ** الفصل الاول في نطاق فلك البروج الذاتية والعرضية الخ . (في المخطوط)

وبين ان حاجي خليفة قد وهّم وان المؤلفَين كتاب واحد لمنجم واحد .[10] وممن ذكر كتاب المدخل هذا البيهقي والاكفاني والقلقشندي .[11]

نقل الكتاب الى اللاتينية يوحنا الاشبيلي[12] الذي ازدهر في طليطلة في نحو ١١٣٥ إلى ١١٥٣ م . ثم وضع له شرحا يوحنا السكسوني سنة ١٣٣١ م بباريس وكان للشرح شأنه .[13] وبعد ظهور الطباعة طُبعت الترجمة اللاتينية مرارا في البندقية سنة ١٤٨١ ، ١٤٨٥ ، ١٤٩١ ، ١٥٢١ . وطبع الشرح في بولونيا بإيطاليا سنة ١٤٧٣ ، ثم في البندقية سنة ١٤٨٥ ، ١٥٢١ ، ذيلا على الترجمة اللاتينية .[14] وفي البندقية ايضاً سنة ١٤٩١ ، ١٥٠٢ ، ١٥٠٣ ، ١٥١٣ ، وبباريس سنة ١٥٢٠ .[15] وكان پلران ده پوس Pélerin de Pousse قد نقل الى الفرنسية نص المدخل اللاتيني وذلك سنة ١٣٦٢ م .[16] وتحتفظ مكتبة شارتر بفرنسا بمخطوط من القرن الميلادي ١٢ فيه ترجمة يوحنا الاشبيلي . وفي نفس القرن استعان بكتاب القبيصي عالم من مرسيليا في فرنسا .[17]

ونقل كتاب المدخل في الأجيال الوسطى إلى العبرية ايضاً ، ولا تزال الترجمة محفوظة[18] كل هذا يدل على مدى شهرة القبيصي آنذاك وانتشار مؤلفه . وسمي القبيصي باللاتينية Alchabitius, Alcabitius[19] . ويرجح نلّينو ان القبيصي قد تأثر بمنجم

السبعة في انفسها وما يعرض لبعضها عند بعض . الفصل الرابع : في تفسير سمات المنجمين . الفصل الخامس : في جمل السهام .

١٠ – وقد نبه نلّينو ايضا الى وهم حاجي خليفة (نلّينو ، المصدر المذكور ، ص ٧٨) .

١١ – البيهقي : تاريخ حكماء الاسلام ، دمشق ١٩٤٦ ، ص ٩٢ . الاكفاني : ارشاد القاصد ، بيروت ١٣٢٢ هـ ، ص ٩٤ . القلقشندي : صبح الاعشى ، ج ١ ، مصر ١٩١٣ ، ص ٤٧٥ .

١٢ – الرجل متعدد الاسماء وثمة شك في هويته انظر Duhem b, Sarton I

١٣ – انظر Duhem c, Suter III

١٤ – Suter III

١٥ – Duhem c

١٦ – Sarton I

١٧ – Duhem b

١٨ – Suter II

١٩ – Suter III

فارسي عاش في آخر دولة بني ساسان أو في القرن الاول الهجري وهو الأَنْدَرْزَغَر بن زاذا نْفَرّوخ ، ويجد في ذلك دليلا يضاف إلى أدلة اخرى عن انتشار العلوم المبكر عند العرب[٢٠] .

٢ً **كتاب في قرانات الكواكب السيارة** لا يعرف إلا من ترجمته إلى اللاتينية ، قام بها يوحنا الاشبيلي وطبعت في البندقية ١٤٨٥ ، ١٥١١ ، ١٥٢١ ، في ذيل **كتاب المدخل** . ثم نشر اورونس فينه Oronce Finé ترجمة فرنسية للكتاب في باريس ١٥٥٦ او ١٥٥٧[٢١] ويرى شتَينشنَيْدر Steinschneider ان هــذا الكتاب مستخرج من الفصلين ٤ً و ٥ً من كتاب المدخل وليس كتابا مستقلا[٢٢] . ولم يبّت احــد في دعوى شتَينشنَيدر وليس في عنوان الفصلين شيء ظاهر يدعم هذه الدعوى كما انه يصعب في هذه الحال ان تتوالى طبعاته في ذيل الكتاب الاول .

٣ً **رسالة في جمع انواع من العدد** آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ١٧ً ، ٨٥ب ــ ٨٨أ . النسخة من القرن ٥ً ه . وضعها القبيصي خدمة لسيف الدولة . وهي الرسالة التي ننشرها اليوم .

٤ً **رسالة في الأبعاد والاجرام** ، آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ١٨ً ، ٨٨ب ــ ٩٤أ ، مخطوط من القرن ٥ً ه . اولها : رأيت اطال الله بقاء الامير سيف الدولة أكثر اهل العلم ... ذكر هذه الرسالة موسى بن ميمون العالم الاسرائيلي المشهور (ت نحو ٦٥٠ ه) في كتابه دلالة الحائرين[٢٣] .

٥ً **ما شرحه من كتاب الفصول للفرغاني** آيا صو فيا ٤٨٣٢ ، ١٩ً ، ٩٤ب ــ ١١٤ب ، النسخة من القرن ٥ ه .

وقد أشار المستشرق Max Krause إلى الرسائل ٣ً ، ٤ً ، ٥ً وعنه نقلنا المعلومات المتعلقة بمخطوطاتها .[٢٤]

٢٠ ــ علم الفلك عند العرب ص ٢١١

٢١ ــ Suter I, II ; Sarton I

٢٢ ــ Suter I

٢٣ ــ Duhem a . انظر أيضاً : " دلالة الحائرين " :
S. Murk, Le guide des égarés ... par Moise b. Maimoun (texte arabe et trad, franc,) 3 vosl., Paris (1856-1866) 2e partie, ch XXIV, tome 2, p. 191

٢٤ ــ Krause

٦ً رسالة في امتحان المنجمين تحوي ثلاثين مسألة واجوبتها . اولها : رسالة عبد العزيز ابن عثمان القبيصي المنجم إلى الامير سيف الدولة . آخرها : فهذا ما امكن في هذا الوقت ان اجمعه من حفظي على حسب الحال . وهي مخطوط في الظاهرية بدمشق ، ٦ ورقات والصفحة ٣٥ سطرا .[٢٥]

٧ً رسالة في الهيئة ، نحو تسع ورقات ، The Chester Beatty Library, A Handlist, of the Arabic Manuscripts, Tome VII, by A. J. Arberry, Dublin 1964 Nº 5254, 6º fol. 244-52
النسخة تقديرا من القرن ١٠ هـ [٢٦]

٨ً نقض رسالة عيسى بن علي في ابطال احكام النجوم، (ولعله عيسى بن علي بن عيسى ابو القاسم ابن الوزير ، وهو محدث معروف كان مطلعا على علوم الأوائل وقرأ المنطق على يحيى بن عدي ، ذكره ابن القفطي في كتابه[٢٧]) . ذكر هذا الكتاب ٨ً في صدر المدخل إلى صناعة النجوم انظر الحاشية ٩ .[٢٨]

٩ً رسالة في مساحة الارض ، ذكرها في رسالة جمع انواع من الأعداد ٣ً (وجاء في المخطوط مسافة الارض) .

١٠ً كتاب النمودارات (في قراءة الطوالع) : ذكره في المدخل ١ً في بدء الفصل الرابع (مخطوط المكتبة البدلية اكسفرد مارش ٦٦٣ ص ٣٢) . وانظر الحاشية [٢٩]

١١ً المسائل والاختيارات فيها ٢٢ مسئلة يمتحن بها المنجمين كانت في مكتبة عباس العزاوي[٣٠] ولا شك ان للقبيصي مؤلفات كثيرة غير هـذه ، فضرورات التعليم واحكام الزمان كانت تقضي على العلماء بالتأليف في شتى ابواب معارفهم تلبية

٢٥ — ابراهيم خوري (انظر الحاشية ٣) ص ٦ .
٢٦ — تاريخ وفاة القبيصي في الفهرست المذكور خاطىء .
٢٧ — اخبار الحكماء ص ١٦٣ .
٢٨ — وكان قد ذكره زوتر Suter II
٢٩ — Suter II . ويوجد في الاسكوريال بمدريد مخطوط : كلام في النيمودار لتصحيح طوالع المواليد مستخرج من كتاب مفتاح الاسرار لابن الكماد H. Derenbourg et H. - P. - J. Renaud, Les Manuscrits Arabes de l'Escurial, T.2, fasc. 3, Paris 1941, nº 939, p. 54.
٣٠ — عباس العزاوي ، علماء الرياضيات والفلك في العراق في عهد آل بويه ، مجلة سومر بغداد ، مجلد ٢٤ ص ١٣٩ — ١٦٩ . انظر ص . ١٤٧ . يظهر وكأن جملة دخيلة قد اضيفت الى عنوان الكتاب .

لطلبات المتعلمين ، هذا بالاضافة إلى تآليفهم العلمية الصرفة . وكان القبيصي يقول الشعر ، ويذكر له ياقوت الحموي ابياتاً ثلاثة قالها في صديق وعَدَه وأخلَّ بوعده[٣١]. ويورد ابن خلكان في ترجمة سيف الدولة بعض ابيات نسبها بعضهم الى سيف الدولة، ونسبها آخرون إلى القبيصي[٣٢] ، وهي من اشعار مجالس الطرب ؛ في بيت منها تشبيه بقوس قزح :

يُطرّزها قوس السحاب بأصفرٍ على احمرٍ في اخضرٍ تحت مُبيَض

وظن المؤرخ الفاضل جورج سارتون انها قصيدة في قوس قزح[٣٣] ، وليس الامر كذلك ، وليست هي من نوع المنظومات التي وضعت في علم الهيئة او الحساب او غيره ، كقصيدة الفزاري والصوفي ونصير الدين الطوسي وغيرهم[٣٤] .

٣١ — ياقوت معجم البلدان ج ٤ بيروت ١٩٥٧ ، ص ٣٠٩ .

٣٢ — انظر الحاشية ٥ . وذكر ابو القاسم الحسين بن علي المغربي كاتب سيف الدولة انه ينسب الى سيف الدولة اشعار كثيرة لا يصح منها له غير اثنين (ابن العديم ، تاريخ حلب ، تحقيق سامي الدهان ، ج ١ ، دمشق ١٩٥١ ، ص ١٥٢) .

٣٣ — Sarton II

٣٤ — قصيدة محمد بن ابراهيم الفزاري معروفة وكذلك ارجوزة عبد الرحمن الصوفي . اما نصير الدين الطوسي فله قصيدة في اختيارات البروج الاثني عشر ، ذكرها آقا بزرك في الذريعة ج ١٧ ، تهران ١٩٦٧ ، ص ١٢٤ ، عدد ٦٥٠ . وله المدخل في علم النجوم منظوم ذكره حاجي خليفة ، كشف الظنون ، استنبول ١٩٤٣ ، ج ٢ عمود ١٦٤٤ .

رسالة القبيصي في جمع انواع من الاعداد

لقد جمع ابو صقر القبيصي المنجم ، في هذه الرسالة ، طرائف قديمة من الحساب زاد عليها من ابتكاراته ، ولعله اضاف من عنده جمع مربعات الأعداد الصحيحة وجمع نضاعيف بيوت الشطرنج اذا وُضع في كل بيت ضعف ما في البيوت السابقة جميعا . ورسالته اقدم مؤلَّف وردت فيه هاتان القضيتان . وختم الرسالة بمعرفة ارتفاع مكانه عال بعمل بناه على المثلثات والجيوب . والرسالة مهداة إلى سيف الدولة الحمداني امير حلب (٣٣٣ – ٣٥٦ هـ) . ويحُفظ من هذه المقالة مخطوط فريد هو آيا صوفيا ٤٨٣٢ ، ١٧ ً ، ٨٥ ب – ١٨٨ ا نسخ في القرن الخامس الهجري وتضم الصفحة ٣٢ سطراً . ولم نجد لرسالة القبيصي ذكرا في المراجع القديمة .

ملاحظـــات

المخطوط بخط جميل واضح وكثيرا ما ترد فيه الحروف غير منقطة .

يميل الناسخ إلى عدم اعراب الاعداد احياناً فيكتب اثنين بدلا من اثنان ، ستين بدلا من ستون .

نضع في الحواشي السفلية الالفاظ الخاطئة كما وردت في المخطوط .

رسالة ابي صقر القبيصي في انواع من الاعداد وطرائف من الاعمال

أيا صوفيا ۴۸۳۲ ص ۸۵ب – ۸۸أ

۵۸ ب

بسم الله الرحمن الرحيم العزة لله

رسالة ابي الصقر عبد العزيز بن عثمن القبيصي في انواع [من] الاعداد وطرائف من الاعمال مما جمعه من متقدمي اهل العلم بهذه الصناعة .

لما كان مولانا سيف الدولة ، اطال الله بقاه ، بعلو همته وفضل قريحته ، يبحث عن كل ادب شريف وعلم لطيف ، وكان العلم بصناعة الحساب من احسن العلوم والنظر فيه من ادق النظر ، رأيته قد بلغ من الدربة الى ان يعمل بيده الغالية من الحساب ما لا يقدر عليه جماعة من الحُسّاب الموصوفين إلا بالهندي ، فاحببت التقرب من خدمته بجميع ما يقع اليّ من محاسنه الشريفة ومعانيه اللطيفة ، وكان قد وقع إليّ ابواب في اختصار جمع انواع من الاعداد ، متفرقة في مواقع شتى ، جمعتها في هذه الرسالة واضفت اليها ابوابا استخرجتها لم اقرأها لاحد تقدمني ، واتبعت ذلك باضعاف بيوت الشطرنج واريت من عظم هذا العدد ما يكبر في نفوس كثير من الناس وجعلته احد عشر باباً .

الباب الأول :

إذا اردت ان تجمع الاعداد التي من الواحد على النظام [الطبيعي] إلى كم شئت ، فخذ آخر الاعداد التي تريد ان تجمعها فاضربه في نفسه ثم زد على ما خرج جذره وخذ نصف جميع ذلك فما كان فهو جمعها . مثال ذلك : انك اردت ان تجمع واحدا[۱] واثنين وثلثة واربعة وكذلك إلى العشرة ، فتأخذ آخر الاعداد وهو عشره ، فتضربها في نفسها فيكون ماية ، ثم تزيد عليها جذرها وهو عشرة فيكون

۱ – واحد

الجميعماية وعشرة ، فتأخذ نصفها وهو خمسة وخمسون ، وهو جمعها ، وكذلك الى ما اردت من الاعداد . واحد اثنان[2] ثلثة اربعة خمسة ستة سبعة ثمنية تسعة عشرة : فذلك الجميع خمسة وخمسون .

الباب الثاني :

إذا اردت ان تجمع الاعداد الافراد من الواحد على النظام الطبيعي الى ما احببت ، فخذ العدد الزوج الذي يلي آخر الاعداد التي تريد ان تجمعها بعده ، وخذ نصفه فاضربه في نفسه ، فما كان فهو جميع الافراد التي اردت ان تجمع ، وهذا العدد ابدا يكون مربعا اعني له جذر صحيح . مثال ذلك : انك اردت ان تجمع الاعداد الافراد من الواحد الى التسعة ، فتأخذ العدد الزوج الذي يلي التسعة بعدها وهو عشرة ، فتأخذ نصفه وهو خمسة ، فتضربها في نفسها فيكون ٢٥ وهو جميع الاعداد الافراد من الواحد الى التسعة . وكذلك الى ما اردت من الاعداد الافراد . واحد ثلثة خمسة سبعة تسعة الجميع ٢٥ .

الباب الثالث :

إذا اردت ان تجمع الاعداد الازواج من الاثنين على النظام الطبيعي الى ما اردت ، فاضرب نصف العدد الزوج الذي هو آخر الاعداد الازواج التي تريد ان تجمع في اكثر من النصف بواحد ، فما كان فهو جميع تلك الاعداد الازواج . مثال ذلك : اردت ان تجمع من اثنين الى ١٢ فنضرب نصف ١٢ وهو ٦ في اكثر من ٦ بواحد ، وهو ٧ ، فيكون ذلك ٤٢ ، وذلك جميع الاعداد الازواج التي من ٢ الى ١٢ . وكذلك الى ما اردت من الاعداد الازواج . فان احببت ان تأخذ نصف آخر الازواج وهو ٦ فتأخذ من واحد الى ٦ كما اريتك في الباب الاول فيكون ١٢ ، ثم تضعف ذلك فيكون ٤٢ وهذا جمعه . ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ فذلك الجميع ٤٢ .

الباب الرابع

إذا اردت ان تجمع الاعداد التي يقال لها المدرجة على النظام الطبيعي وهو ان تجمع ضرب واحد في ٢ وضرب ٢ في ٣ وضرب ٣ في اربعة وكذلك الى اي عدد شئت ، فخذ العدد الذي هو آخر الاعداد التي ذكرت والعدد الذي هو أكثر منه

٢ – اثنين

بواحد والعدد الذي هو اقل منه بواحد ، فيكون ذلك ثلثة اعداد لاحدها ثلث صحيح ، فتضرب احد العددين اللذين ليس لكل واحد منهما ثلث صحيح احدهما في الآخر ، وما اجتمع ضربته في ثلث العدد الذي له ثلث صحيح فما كان فهو | ما يجتمع من الاعداد المدرجة . مثال ذلك: انك اردت ان تجمع ضرب واحد في اثنين و ٢ في ٣ و ٣ في ٤ وكذلك الى ٩ في ١٠ ، فتأخذ آخر الاعداد وهو ١٠ واكثر منه بواحد ١١ واقل منه بواحد ٩ ، والتسعة من هذه الاعداد لها ثلث صحيح ، فتضرب ١٠ في ١١ فيكون ١١٠ وتضرب ذلك في ثلث ٩ وهو ٣ فيكون ذلك ٣٣٠ وهو ما يجتمع من الاعداد المدرجة الى ٩ في ١٠ ، وكذلك الى ما اردت من الاعداد المدرجة . وهذا مثاله : واحد في اثنين ٢ ، اثنان[3] في ثلثة ٦ ، ثلثة في اربعة ١٢ ، اربعة في خمسة ٢٠ ، خمسة في ستة ٣٠ ، ستة في سبعة ٤٢ ، سبعة في ثمنية ٥٦ ، ثمنية في تسعة ٧٢ ، ٩ في ١٠ ٩٠ فذلك الجميع ثلثماية وثلاثون[4] .

١٨٦ ا

الباب الخامس :

إذا اردت ان تجمع الاعداد التي على الضعف من الواحد ، وهو الذي يعرف **باضعاف بيوت الشطرنج** ، فاضرب ضعف الواحد في نفسه فيخرج لك الضعف الذي [هو] اقل من ضعف الثاني بواحد وهـو الثالث ، * فان نقصت من ذلك واحدا كان الباقي جميع ما في البيت الاول والثاني وان لم تنقص منه واحدا وضربته في نفسه خرج لك الضعف الذي هو اقل من ضعف الثالث بواحد وهو الضعف الخامس فان نقصت من ذلك واحدا كان جميع ما في البيت الاول والثاني والثالث والرابع . مثال ذلك : انك اردت ان تضعف الواحد بعدد بيوت الشطرنج فكم[5] جميع ذلك ؟ فانك تضرب ما في البيت الثاني في نفسه فيكون ما في البيت الثالث وهو اربعة ، فإن نقصت من الاربعة واحدا بقيت ثلثة وهو ما في البيت الاول والثاني ،

٣ – اثنين ٤ – وثلثين
٥ : البيوت ١ ٢ ٣ ٤ ٥ وفيها
١ ٢ ٤ ٨ ١٦
فاذا ضرب ما في البيت الثاني في نفسه خرج ما في البيت الثالث : ٢ × ٢ – ١
واذا ضرب ما في البيت الثالث في نفسه خرج ما في البيت الخامس : ٢ × ٣ – ١
وقد عنى بالضعف تارة مثلي العدد وتارة ما في البيت الواحد . ضعف الواحد في نفسه : اي ٢ في نفسه . الضعف الذي هو أقل من ضعف الثاني بواحد : العدد الذي مرتبته ضعف مرتبة الثاني الا واحدا .
٥ – وكم

واذا ضربت ما في البيت الثالث في نفسه خرج ما في البيت الخامس وهو ١٦ ، فان نقصت منه واحدا بقي خمسة عشر وهو جميع ما في البيت الاول والثاني والثالث والرابع ، واذا ضربت ما في البيت الخامس في نفسه كان ذلك ما في البيت التاسع وهو ٢٥٦ ، فان نقصت من ذلك واحدا كان الباقي جميع ما في البيت الاول والثاني والثالث والرابع والخامس والسادس والسابع والثامن . واذا ضربت ما في البيت التاسع في نفسه خرج ما في البيت السابع عشر ، فاذا نقصت من ذلك واحدا كان جميع ما في [البيوت ١٦] [٦] واذا ضربت ما في البيت السابع عشر في نفسه خرج ما في البيت ٣٣ ، واذا نقصت مما في البيت ٣٣ واحدا كان الباقي جميع ما في البيوت ٣٢ ، واذا ضربت ما في البيت ٣٣ [٧] في نفسه كان ذلك ضعف ما في البيت الرابع والستين[٨] فان نقصت من ذلك واحدا كان الباقي جميع ما في البيوت ٦٤ وان تنصفه[٩] قبل نقصان الواحد كان الباقي[١٠] ما في البيت ٦٤ . وانا ابين جملة ذلك آخر هذه الرسالة واشياء تليق بذلك الموضع من عظم ما يجتمع من هذا العدد .

الباب السادس :

اذا اردت ان تضعف بيوت الشطرنج إضعافا آخر هو اعظم من هذا وهو ان تجعل في البيت الأول واحدا وفي الثاني اثنين ، وفي الثالث ضعف ما في البيتين جميعا اللذين قبله وذلك ستة ، وفي الرابع ضعف جميع ما في البيوت التي قبله وذلك [ثمنية عشر ، وفي الخامس ضعف جميع ما في البيوت التي قبله] وذلك اربعة وخمسون[١١] ، وكذلك الى ما اردت وبابه ان تضرب ما في البيت الثاني في نفسه وتزيد على ما خرج من الضرب نصفه فيكون ما في البيت الثالث ، ثم تضرب ما في البيت الثالث في نفسه وتزيد على ما خرج من الضرب نصفه فيكون ما في البيت الخامس ، ثم تضرب ما في البيت الخامس في نفسه وتزيد عليه نصفه فيكون ما في البيت التاسع ، وتضرب ما في البيت التاسع في نفسه وتزيد على ما خرج نصفه فيكون

٦ — البيت السادس عشر . هنا في الحاشية جملة غير مستقيمة ولا يرى موقعها في النص .

٧ — ٣٢

٨ — وستين

٩ — نصفه

١٠ — كذا في المخطوط ولعل الصواب : كان الحاصل

١١ — وخمسين

ما في البيت ١٧ ، ويجري الامر في ترتيب البيوت كما جرى في الباب الذي قبل هذا الى ان يخرج لك ما في البيت الخامس والستين[١٢] فتنصفه فقط فيكون جميع ما في البيوت ٦٤ . مثال ذلك : إنا اذا ضربنا ما في البيت الثاني في نفسه وهو اثنان كان اربعة فاذا زدنا عليها نصفها صارت ستة وهي ما في البيت الثالث ، وهي ضعف ما في الاول وهو واحد والثاني وهو اثنان[١٣] . فاذا ضربنا ما في الثالث في نفسه كان ٣٦ فاذا زدنا عليها نصفها صارت ٥٤ ، وذلك انه إذا كان في الثالث ٦ فانه يصير في الثلثة ٩ ففي الرابع ١٨ فيكون في الاربعة ٢٧ ، ففي الخامس ضعفها وهي ٥٤ . فإذا ٨٦ ب ضربت ٥٤ في نفسها فان ذلك ٢٩١٦ ، فاذا زدت عليها نصفها صارت | ٤٣٧٤ وهو ما في البيت التاسع ، لانه اذا كان في البيت الخامس ٥٤ فان جميع ما في البيوت الخمسة ٨١ ، ففي السادس ١٦٢ ، ففي الست البيوت ٢٤٣ ، ففي البيت السابع ٤٨٦ ، فيكون جميع ما في البيوت السبعة ٧٢٩ ، ففي البيت الثامن ١٩٥٨ ، فجميع ما في الثمنية البيوت ٢١٨٧ ، ففي البيت التاسع ٤٤٧٤ . وكذلك الى ان يخرج ما في البيت الخامس وستين ، فتضعفه فيكون جميع ما في بيوت السفرة . وكذلك الى ما اردت من الاضعاف

الباب السابع :

اذا اردت ان تجمع الاعداد التي يقال لها المربعات وهي الاعداد المجذورة من الواحد الى ما اردت على النظام الطبيعي فخذ جذر آخر الاعداد التي تريد ان تجمعها ، فاضربه في أكثر منه بواحد ، ثم ما اجتمع في ضعف ذلك الجذر وزده واحدا ، وخذ سدس ما اجتمع فما كان فهو جميع الاعداد المربعات التي اردت . مثال ذلك : انك اردت ان تجمع الاعداد المجذورة من الواحد الى ٢٥ فتأخذ جذر ٢٥ وهو ٥ ، فتضربه في اكثر منه بواحد فيكون ٣٠ ، ثم تضرب ذلك في ضعف الجذر وهو عشرة وزيادة واحد وذلك ١١ ، فيكون ٣٣٠ ، فتأخذ سدسها وهو ٥٥ وهو جميع الاعداد المجذورة من الواحد الى ٢٥ . وكذلك الى ما اردت من الاعداد المجذورة ١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥ فذلك الجميع ٥٥ .

١٢ – وستين
١٣ – اثنين

الباب الثامن :

اذا اردت ان تجمع الاعداد المكعبات التي من الواحد الى ما اردت على النظام الطبيعي ، والعدد المكعب هو ما يكون من ضرب عدد في نفسه وما اجتمع في جذره ، وذلك الجذر هو ضلع المكعب . مثل الثمنية فانها تكون من ضرب اثنين في اثنين وما اجتمع في اثنين فيكون ثمنية وهي المكعب وضلعها اثنان[14] . وكذلك سبعة وعشرون[15] عدد مكعب ، وضلعه ثلثة ، لان ثلثة في ثلثة تسعة ثم تسعة في ثلثة ٢٧ . فاذا اردت ذلك فاعرف ضلع المكعب الذي هو آخر العدد المكعب الذي تريد جمعه ، فاجمع من الواحد اليه على النظام الطبيعي ، كما بينت ذلك في الباب الاول من هذه الرسالة ، فما كان فاضربه في نفسه ، فما اجتمع فهو جميع الاعداد المكعبة التي تريد جمعها . مثال ذلك : انك اردت ان تجمع الاعداد المكعبة من الواحد الى الالف ، فتأخذ ضلع مكعب الالف وهو عشرة فتأخذ من الواحد الى العشرة على النظام الطبيعي وهو كما ذكرت في الباب الاول ٥٥ ، فتضربها في نفسها فيكون ذلك ٣٠٢٥ ، وذلك هو جميع المكعبات من الواحد الى الالف . ونحن نذكر تحت كل مكعب ضلعه

واحد	ثمنية	سبعة وعشرين	٦٤	١٢٥	٢١٦	٣٤٣	٥١٢	٧٢٩	الف
واحد	اثنين	ثلثة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

فذلك ٣٠٢٥ .

الباب التاسع :

اذا اردت ان تجمع الاعداد التي هي مربعات المربعات من الواحد الى ما اردت على النظام الطبيعي ، ومربع المربع هو ما يحدث من ضرب عدد في نفسه وما اجتمع في نفسه مثل ١٦ فانها تحدث [من ضرب] ٢ في نفسها وذلك ٤ و ٤ في نفسها وهي ١٦ فالستة عشر مربع المربع وضلعه اثنين وكذلك ٨١ فانها من ضرب ٣ في ٣ فيكون ذلك ٩ ثم في ٩ وذلك ٨١ وضلعها ثلثة ، فاذا اردت جمعها فخذ ضلع آخر المربعات التي تريد جمعها فاضربه في نفسه وزد على ما اجتمع مثل نصف

١٤ – اثنين
١٥ – وعشرين

العدد المضروب في نفسه ، فما بلغ فاضربه في العدد الذي هو أكثر من المضروب في نفسه بواحد ، فما كان فهو صحاح بغير كسر فاحفظه . ثم اضرب خُمُس العدد المضروب في نفسه وزيادة خمس واحد في العدد المضروب في نفسه فما بلغ فانقص منه ثُلُثي عُشْر واحد ، فما بقي فاضربه فيما كنت حفظت ، فما بلغ فهو مجموع مربعات المربعات التي اردت جمعها . مثال ذلك : اردت ان تجمع من الاعداد التي هي مربعات المربعات من الواحد الى الالف وما بين وست وتسعين التي هي مربع مربع الستة ، فتأخذ ضلع العدد المربع الذي هو اخر الاعداد التي تريد ان تجمعها وهي ستة فتضربها في مثلها فيكون ٣٦ ، وتزيد على ذلك مثل نصف السنة فيصير ٣٩ فتضربها في العدد الذي هو | أكثر من ٦ بواحد وذلك ٧ فتصير ٢٧٣ فتحفظها . ١ ٧٨
ثم تضرب خُمُس ٦ وهو واحد وخُمُس وزيادة خُمُس واحد وذلك ١ ٢ ٥ [16] في ٦ فيكون ذلك ٨ ٢ ٥ [17] فتسقط منه ثُلثي عُشَر واحد فيبقى ثمنية وثُلث ، فتضربها فيما كنت حفظت وهو ٣٧٢ فيكون ذلك ٢٢٧٥ ، وذلك جمع مربعات المربعات التي اضلاعها من واحد الى الستة . وكذلك الى ما اردت ، وقد اثبت ضلع كل عدد منها تحته :

واحد	١٦	٨١	٢٥٦ [18]	٦٢٥	١٢٩٦	
واحد	٢	٣	٤	٥	٦	فيكون الجميع ٢٢٧٠

الباب العاشر :

اذا اردت ان تجد الاعداد التامه ، **والعدد التام** هو الذي جميع اجزائه الصحاح مساوية له ، ومعنى اجزائه[19] الصحاح الاعداد التي تعده فتقيسه . فلنقدم قبلُ ما يحتاج اليه في علم ذلك ، وذلك ان في الاعداد اعدادا يقال لها أُول العدد . **والعدد الأول** هو الذي لا يعده إلا الواحد فقط ، مثل ٣ فان الثلثة لا يعدها إلا الواحد

١٦ — ٥١
١٧ — ٥٨ .
١٨ — ٢٥٢ .
١٩ — اجزاه .

فقط ، وكذلك الخمسة والسبعة و ١١ و ١٣ . فان كل واحد من هذه الاعداد لا يعده الا الواحد فقط . ومنها **العدد المركب** وهو الذي يعده عدد اخر ، مثل ٦ فانها يعدها ، ثلث مرات ، ويعدها ٣ مرتين . ومثل ١٢ فانها يعدها ، ست مرات و ٣ اربع مرات و ٤ ثلث مرات ويعدها ٦ مرتين . ومثل ١٥ فانها يعدها ٣ خمس مرات ويعدها ٥ ثلث مرات . فان هذه الاعداد يقال لها مركبة . وفي الاعداد اعداد يقال لها **متباينة** وهي الاعداد التي لا يعدها جميعا إلا الواحد مثل خمسة وثمانية فانه لا يعدها الخمسة فتقيسها[٢٠] ولا يعدها الثمنية فتقيسها[٢٠] ايضاً ، [فلا يعدها] غير الواحد فقط . ومثل ٦ و ٧ فانه لا يعد ٦ فيقيسها[٢٠] ويعد ٧ فيقيسها[٢٠] عدد غير الواحد فقط . ومنها اعداد يقال لها **المشتركة** وهي الاعداد التي يعدها جميعا عدد فيقيسها[٢٠] مثل ٦ و ٩ فان ٣ تعد ٦ وتعد هي ايضاً ٩ فالستة و ٩ عددان مشتركان[٢١] في الثلثة . وكذلك ١٠ و ١٦ فان الاثنين يعد ١٠ وهي ايضاً تعد ١٦ فالعشرة والستة عشر مشتركان[٢١] في الاثنين . وكذلك ١٢ و ١٥ فانهما مشتركان في الثلثة اذ الثلثة تعدهما جميعا . فاذ قدمنا هذا فلنذكر كيف نجـــد **العدد التام** فنقول : إذا اردت « ذلك فخذ »[٢٢] الاعداد التي تتضاعف من الواحد والواحد معها ، فان كان جميع ذلك عددا اول ضربت ذلك في آخر الاعداد التي انتهت اليها المتضاعفة من الواحد ، فما اجتمع فهو عدد تام . مثال ذلك أنك اخذت الواحد والاثنين التي هي ضعف الواحد فيكون ذلك ثلثة وهو عدد اول لأنه لا يعد الثلثة الا الواحد فقط ، فتضرب الثلثة في الاثنين التي هي آخر الاعداد التي اخذت فيكون ٦ وهو عدد تام وهي اول الاعداد التامة لان الواحد يعدها والاثنين والثلثة يعدها وجميع ذلك ستة ، وليس يعدها عدد آخر غير هذه . وكذلك اذا اخذت الواحد والاثنين والاربعة كان جميع ذلك سبعة وهي عدد اول فتضربها في الاربعة التي هي آخر الاعداد المتضاعفة فيكون ذلك ٢٨ وهي عدد تام لانه لا يعدها الا واحد ٢ ٤ ٧ ١٤ فجميع ذلك ٢٨ وليس يعدها غير ذلك ، وهذا هو العدد الثاني من الاعداد التامة . فان اخذت ١ ٢ ٤ ٨ كان ذلك ١٥ وليس ١٥ عددا اول لان ٣ تعدها و ٥ تعدها فليس يكون من ضربك اياها في ٨ عدد تام لأنه يكون من ضربك اياها في

٢٠ – وردت دون تنقيط : ممهسا .
٢١ – مشتركين .
٢٢ – ممحو في المخطوط .

ثمنية ۱۲۰ و ۱۲۰ يعدها ۱ ۲ ۳ ٤ ٥ ٦ ثمنية ١٠ ١٢ ١٥ ٢٠ ٢٤ ٣٠ ٤٠ ٦٠ فجميع ذلك ٢٤٠ وهذا ضعف العدد . لكن اخذنا واحدا و ٢ و ٤ و ٨ و ١٦ كان ذلك ۳۱ وهي عدد اول اذ كان لا يعدها الا الواحد فقط فاذا ضربت الواحد وثلثين في ١٦ التي هي آخر الاعداد التي اخذت متضاعفة من الواحد كان ٤٩٦ وهي عدد تام لانه يعدها ١ ٢ ٤ ٦ ٨ ١٦ ٣١ ٦٢ ١٢٤ ٢٤٨ فالجميع ٤٩٦ . وكذلك ما اردت من الاعداد التامة .

الباب الحادي عشر :

اذا اردت ان تجد **الأعداد المتحابة** والعددان اللذان يقال لهما متحابين هما عددان يكون جميع اجزاء كل واحد منهما اعني جميع الاعداد التي تعده مساوية للآخر . والطريق الى وجود هذه الاعداد المتحابة ان تأخذ الاعداد المتضاعفة | من الواحد الى ما اخذت وتجمعها والواحد معها وتزيد على ذلك العدد الآخر من الاعداد التي جمعت وتحفظ ذلك ثم تنقص مما جمعت اولاً ، العدد الذي يلي آخر الاعداد التي كنت جمعت قلبه* ، وتحفظ ما هي فان كان كل واحد من العددين المحفوظين عددا اولا بعد ان لا يكون اثنين ضربت احدهما في الآخر ، فما اجتمع ضربته في العدد الذي هو آخر الاعداد التي كنت جمعت اولا فما بلغ فهو احد العددين المتحابين . ثم تأخذ العدد الذي هو مثلا[٢٣] العدد الآخر من الاعداد التي كنت جمعت[٢٤] فما بلغ فهو العــدد الثاني من العــددين المتحابين الذي بدأنا بذكر قرينه . فان لم تصح الشرائط على ما وصفت تجاوزت العــدد الذي كنت انتهيت اليه عند الجمع واستعملت ما ذكرت ، فانك تجد ما تريد ان شاء الله . واذا اردت ان تجد عددين آخرين على هذه الصفة تجاوزت ايضاً ذلك العدد وفعلت مثل ما تقدم فانك تجد ما تريد ، وكذلك كم شئت من الاعداد .

٨٧ ب

مثال ذلك : اخذت ١ ٢ ٤ فكان ٧ وزدت على ذلك آخر الاعداد وهو ٤ فكان ١١ وهي عددٌ اول ، ثم نقصت من السبعة العدد الذي [يلي] آخر الاعداد

* قبله عائدة الى يلي ، المراد ان ينقص من الجملة العدد الواقع قبل آخر الاعداد .

٢٣ – مثلي .

٢٤ – سقط في النسخ جملة طويلة معناها : والعدد الذي بينه وبين اخر الاعداد عدد واحد ، فتضرب ذلك جميعاً في العدد الذي هو مثلا آخر الاعداد وتنقص ما اجتمع واحدا ، فان كان الباقي عددا اولا فتضربه في آخر الاعداد التي كنت جمعت " وسوف يتضح ذلك من المثال .

قبله وهو ٢ فبقي خمسة وهي عدد اول ، فضربت ١١ في ٥ فصار ٥٥ ثم ضربت ذلك في آخر الاعداد التي كنت جمعت وهو ٤ فكان ذلك ٢٢٠ وهو احد العددين المتحابين . ثم اخذت مثلي آخر الاعداد التي جمعت وهو ٤ وذلك ٨ والعدد الذي قبل آخر الاعداد وبينهما عدد واحد وذلك واحد . فيصير ٩ فتضرب ذلك في العدد الذي هو مثلا[٢٥] اخر الاعداد وهو ٨ فيكون ٧٢ ، فتنقص منه واحدا فيبقى ٧١ وهي عدد اول ، فتضربه في آخر الاعداد التي كنت جمعت وهو ٤ ، فيكون ذلك ٢٨٤ . وهو العدد الثاني من العددين المتحابين ، فاجزاء ٢٢٠ وهي الاعداد التي تعده ١ ٢ ٤ ٥ ١٠ ١١ ٢٠ ٢٢ ٤٤ ٥٥ ١١٠ الجميع ٢٨٤ وليس يعدها غير هذه الاعداد وهي العدد الآخر من العددين المتحابين . واجزاء ٢٨٤ وهي الاعداد التي تعده ١ ٢ ٤ ٧١ ١٤٢ الجميع ٢٢٠ وليس يعدها غير هذه الاعداد . وكذلك كلما اردت استخراج الاعداد المتحابة .

[٢٦] لي في هـــذا الوقت من هـــذا المعنى . واذ قـــد وعدت ان اذكر في آخر هذه الرسالة اضعاف بيوت الشطرنج وجملته[٢٧] فلنأت به . واذ كنا قد بلغنا في الباب الخامس من اضعاف بيوت الشطرنج الى ما في البيت التاسع وهو ٢٥٦ فاذا ضربت هذا في نفسه كان ما في البيت ١٧ وهو ٦٥٥٣٦ ، فاذا نقصت من هذا واحدا كان الباقي جميع ما في البيوت ١٦ ، واذا ضربت ذلك في نفسه كان ذلك ما في البيت ٣٣ وهو ٤٢٩٤٩٦٧٢٩٦ [٢٨] فاذا نقصت من هذا واحدا كان الباقي جميع ما في البيوت ٣٢ واذا ضربته في نفسه كان ذلك ضعف ما في البيت ٦٤ وهو ١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٦ [٢٩] فاذا نقصت من جميع ذلك واحـــدا كان الباقي جميع ما في رقعة الشطرنج ويتّبت[٣٠] من عظم هذا العدد ما انا ذاكره وذلك انه قد تبيّن في الرصد الذي رصده المأمون مما حكاه جماعة اصحابه وبينت كيفية

٢٥ – مثل .
٢٦ – بقعة حبر تغطي مكان كلمتين او ثلاثة والمعنى تقديرا : هذا ما نسخ . انظر في ترجمة القبيصي ، الرسالة ٨ ، معنى مشابها لهذا .
٢٧ – الكلمة غير واضحة وكتابتها معادة .
٢٨ – ٤٢٩٨٥٦٩٦ .
٢٩ – ١٨ ٢١٥ ٥٤٤ ٨٣٩ ٧٣٨ ١٥١ ٦١٦
٣٠ – وبس

ذلك **في رسالتي في مساحة[31] الارض** انهم وجدوا ما يوازي درجة من الفلك من مساحة الارض ٥٦ ميلا وثلثي ميل ، وقد تبين ان الارض في وسط الفلك كالنقطة في الدائرة ، فيكون دور الارض على هذا الحساب اذ كان يحيط بها ٣٦٠ درجة ٢٠٤٠٠ ولما كان المحيط مثل القطر ثلث مرات وسبع على ما بينه ارشميدس يكون قطر الارض ٦٤٩١ ميلا ، ولما كان قد تبين ايضاً من قول ارشميدس ان ضرب قطر الكرة في محيط اعظم دائرة تقع عليها هو مساحة جميع ظاهرها يكون مساحة جميع ظاهرها على هذا الحساب ١٣٢٤١٦٤٠٠ ميلا مكسرة ولما كان الميل المكسر اربعة الاف ذراع في اربعة الاف ذراع يكون الميل ستة عشر الف الف ذراع فيكون مساحة جميع ظاهرها ، برها وبحرها وسهلها وجبلها وعامرها وغامرها ٢١١٨٦٦٢٤٠٠٠٠٠٠٠٠ ذراعا . واذا كان قوس* ذراع في ذراع من الورق الوضح مما امتحنته ٥٠٠ درهم يكون جميع قوس الارض | برها وبحرها وسهلها وجبلها من الورق ١٠٥٩٣٣١٢٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ درهما ، فيكون اضعاف بيوت الشطرنج مثل هذه الجملة سبع عشرة مرة وخمسي[32] مرة بالتقريب . وهذا اضعاف بيوت الشطرنج الذي في الباب الخامس وهو الاصغر ، فاما الذي في الباب السادس فانه اضعاف هذا المقدار مرارا كثيرة ولعل قائلا يقول كيف يحصل بسيط ظاهر الارض مع ما فيه من الجبال الشاهقة والاودية القعرة فنقول في جواب ذلك :

١٨٨

٣١ – مسافة

* قوس الشيء مقداره وقياسه من قاس يقوس وهو اقل شيوعا من قاس يقيس قيساً . جاء في لسان العرب لابن منظور طبعة بيروت ، مجلد ٦ ، ١٩٥٦ ، ص ١٨٦ . واهل المدينة يقولون لا يجوز هذا في القوس يريدون القياس .

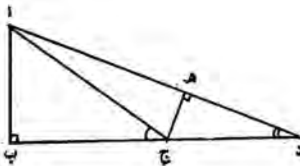
معنى العبارة فيما نفهمه ان القبيصي اخذ صفيحة من الفضة الخالصة ، ذراعا في ذراع فوزنها ٥٠ درهم ، إلا انه لم يعين سمكها . فاذا قدرنا الذراع السوداء التي اعتبرها ٥٤,٠٤ سم والدرهم ٣,١٤ غرام وثقل سم٣ من الفضة ١٠,٥ غرام، يكون سمك الصحيفة نصف ملم تقريبا وهو سمك معقول وإلى مثل هذا يذهب الخازني في كتابه ميزان الحكمه ، ٥١٥ ﻫ ، عندما يسأل عن دراهم تضاعيف الشطرنج ما مقدار سمكها اذا بسطت على وجه الارض . ومسافة بسيط الارض بالاميال المكسرة والذرعان في كتابه توافق تماما ما جاء في رسالة القبيصي (عبد الرحمن الخازني ، ميزان الحكمة ، حيدر آباد ، ١٣٥٩ ﻫ ، ص ٧٦ ؛ في الطبعة ، العدد الثاني ينقصه صفر) . ولعل في نشر الفضة بهذا الشكل على بسيط الارض ذكرى للآية الكريمة : (إن الذين كفروا وماتوا وهم كفار فلن يقبل من احدهم ملء الارض ذهبا لو افتدى به اولئك لهم عذاب اليم وما لهم من ناصرين) وقد استشهد الخازني بهذه الآية . (ص ٧٣ من ميزان الحكمة) .

٣٢ – وخمسين ؟

انا نستعظم ذلك بالقياس الينا لا الى جملة الارض ، اذ كان ما يدرك جملته وان عظم في حواسنا كالجزء الذي لا يتجزأ اذا قسناه الى جملة الارض . فانه ذكر من عني بالبحث عن ذلك انه لم يجد فيما ذكر من جملة هذا الربع المسكون جبلا اعلى[٣٣] من جبل سرنديب وانه اخذ عموده الى مسقط حجره ، ونحن نذكر كيف يوجد ذلك وهو معرفة ارتفاع ما لا يوصل الى اسفله بعد كلامنا هذا ، فعرف مقداره وقد عرف مقدار قطر الارض بالطريقه الذي ذكرنا ، ثم اخذ كرة فجعل عليها شخصا جعل مقدار ارتفاعه على الكرة من قطرها كمقدار ارتفاع جبل سرنديب الى قطر الارض ، فكان ذلك على ظهر الارض كالخشونة[٣٤] لا يحُسّ صِغَراً . وكذلك جميع الجبال والاودية اذا قسناها الى جملة الارض كانت لا تحُسّ وكانت الارض كأنها بسيطة الظهر .

فاما معرفة ارتفاع شيء ما عن وجه الارض اذا لم نصل الى اسفله فهو **معرفة اعمدة الجبال** . اذا اردت ذلك فخذ ارتفاع رأس الجبل في ارض مستوية بقياس الاسطرلاب كما تأخذ ارتفاع الكوكب . ثم تتأخر عن ذلك الموضع بمقدار ما يتغير الارتفاع درجا ما ، ثم خذ ارتفاعه في ذلك الموضع الثاني ثانية ، واجعل الارتفاع الاول جيبا وهو الجيب الاول ، ثم انقص الارتفاع من ص* واجعل الباقي جيبا وهو الجيب الثاني وكذلك فافعل بالارتفاع الثاني فيخرج لك الجيب الثالث والجيب الرابع . ثم تضرب الجيب الثاني في الجيب الثالث وتقسمه على الجيب الاول فما خرج نقصته من الجيب الرابع وتحفظ ما بقي . ثم تضرب ما بين الموضعين اللذين اخذت منهما الارتفاع من الاذرع في الجيب الثالث وتقسم على ما كنت حفظته فما خرج فهو عمود الجبل وارتفاع الشيء المطلوب ارتفاعه .

٣٣ – اعلا .
٣٤ – كالحـونه .
* ص اي ٩٠ درجة = جيب اول = جيب ج^ .
جيب ثان = جيب (٩٠° – ج^)
جيب ثالث = جيب د^
جيب رابع = جيب (٩٠° – د^)
ويلاحظ عدم استعمال لفظة جيب التمام



فاذا اردت ان تعلم كم بين الموضع الذي اخذت فيه الارتفاع الاول ومسقط عمود الجبل من مستوى الارض ، فاضرب ما خرج من القسم قبل ان تسقطه من الجيب الرابع فيما بين الموضعين من الاذرع ، وتقسمه ايضاً على ما حفظته من الباقي . فما خرج فهو ما بين الموضع الاول الذي اخذت فيه الارتفــاع ومسقط عمود الجبل من مستوى الارض . فان اردت ان تعلم كم بين ناظرك في الموضع الذي اخذت فيه الارتفاع الاول وبين رأس الجبل فاضرب ما بين الموضع ومسقط عمود الجبل في نفسه ، واضرب عمود الجبل في نفسه ، واجمعهما ، ثم خذ جذر ذلك . فهو ما بين ناظرك ورأس الجبل وذلك ما اردنا علمه .

←

$$\overline{\text{اب}} = \overline{\text{جد}} \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}} : \left[\text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{د}}) - \frac{\text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{ج}}) \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}}}{\text{جيب}\,\hat{\text{ج}}}\right] \quad (\text{١})$$

ولعل الطريق التي اتبعها القبيصي للوصول إلى القاعدة (١) هي ما يلي :

نرسم ج ه عمودا على اد ، فالمثلثان $\triangle$ اب د ، $\triangle$ ج ه د متشابهان . ينتج عنه :

$$\frac{\overline{\text{جه}}}{\overline{\text{اب}}} = \frac{\overline{\text{جد}}}{\overline{\text{اد}}} = \frac{\overline{\text{بد}} - \overline{\text{بج}}}{\overline{\text{اد}}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{\overline{\text{جه}}}{\overline{\text{اب}}} = \frac{\overline{\text{بد}}}{\overline{\text{اد}}} - \frac{\overline{\text{بج}}}{\overline{\text{اد}}} = \frac{\overline{\text{بد}}}{\overline{\text{اد}}} - \frac{\overline{\text{بج}}}{\overline{\text{اب}}} \cdot \frac{\overline{\text{اب}}}{\overline{\text{اد}}}$$

ولكن ج ه = ج د × جيب $\hat{\text{د}}$

$$\text{يكون} \quad \frac{\overline{\text{جد}} \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}}}{\overline{\text{اب}}} = \text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{د}}) - \frac{\text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{ج}})}{\text{جيب}\,\hat{\text{ج}}} \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}}$$

$$\text{ينتج منه القاعدة (١) :}\quad \text{اب} = \text{جد} \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}} : \left[\text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{د}}) - \frac{\text{جيب}\,(\text{٩٠} - \hat{\text{ج}}) \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}}}{\text{جيب}\,\hat{\text{ج}}}\right]$$

$$\text{حساب } \overline{\text{بج}}\text{، يقول القبيصي: } \overline{\text{بج}} = \overline{\text{جد}} \times \frac{\text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{ج}}) \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}}}{\text{جيب}\,\hat{\text{ج}}} : \left[\text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{د}}) - \frac{\text{جيب}\,(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{ج}}) \times \text{جيب}\,\hat{\text{د}}}{\text{جيب}\,\hat{\text{ج}}}\right]$$

$$\left[\text{وينتج حساب بج من ضرب اب في جيب } \frac{(\text{٩٠}^\circ - \hat{\text{ج}})}{\text{جيب ج}}\right]$$

تمت رسالة ابي صقر عبد العزيز بن عثمن القبيصي في انواع من الاعداد وطرائف من الاعمال مما جمعه من متقدمي اهل العلم بهذه الصناعة والحمد لله رب العالمين والصلوة على رسوله محمد وآله اجمعين .

المراجع الأجنبية

Brockelmann: C. Brockelmann, *Geschichte der Arabischen Litteratur*, 1. Supplement (Leiden: Brill, 1937), p. 399.

Canard : M. Canard, *Histoire de la dynastie des Hamdanides de Jazira et de Syrie*, tome I (Alger, 1951).

Duhem: P. Duhem, *Le système du monde*. a) tome II (Paris, 1914), p. 53; b) tome III (Paris, 1958), pp. 177-183, 214; c) tome IV (Paris, 1964), pp. 86-87, 221.

Mieli: Aldo Mieli, *La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondiale* (Leiden, 1966), pp. 110, 114.

Krause: Max Krause, "Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik und Physik*, Abteilung B, Studienband 3 (1936), 437-532.

Sarton I: G. Sarton, *Introduction to the History of Science* (Baltimore, 1953), volume II, part 1, pp. 169-172.

Sarton II: *Ibid.*, volume I, p. 669.

Sauvaget: J. Sauvaget, *Alep. Essai sur le développement d'une grande ville syrienne, des origines au milieu du XIX^e siècle* (Paris, 1941).

Suter I: Heinrich Suter, "Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, 10 (1900), Nr. 132.

Suter II: Heinrich Suter, "Nachtrage und Berichtigungen zu'Die Mathematiker ... '", *ibid.*, 14 (1902), Nr. 132, pp. 165-166.

Suter III: Heinrich Suter, "al-Kabīṣī", *Encyclopédie de l'Islam* (Leiden, 1927).

Et $BC = CD.\frac{\sin(90^\circ - \widehat{D}) \sin \widehat{D}}{\sin C} : \left[\sin(90^\circ - \widehat{D}) - \frac{\sin(90^\circ - C) \times \sin D}{\sin C} \right]$ (2)

Observation

Al-Qabīṣī énonce les formules (1) et (2) sans démonstration. La structure de (1) rend possible la démarche suivante (voir fig. 1) : Abaisser CH perpendiculaire à AD. Les triangles CHD et ABD sont semblables.

$\frac{CH}{AB} = \frac{CD}{AD}$ comme $CD = BD - BC$, on a $\frac{CH}{AB} = \frac{BD}{AD} - \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AD} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AD}$

Mais $CH = CD \sin D$. D'où $\frac{CD \sin D}{AB} = \sin(90^\circ - D) - \frac{\sin(90^\circ - C)}{\sin C} \cdot \sin D$

On en tire $AB = CD \sin D : \left[\sin(90^\circ - D) - \frac{\sin(90^\circ - C) \cdot \sin D}{\sin C} \right]$ (1)

On obtient BC en multipliant AB par $\frac{\sin(90^\circ - C)}{\sin C}$

10) Trouver un nombre parfait, c'est-à-dire égal à la somme de ses diviseurs.

Si $(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n)$ est premier alors $2^n\ (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n)$ est un nombre parfait. Exemple $(1 + 2)\ 2 = 6$; $(1 + 2 + 2^2)\ 2^2 = 28$; $(1 + 2 + ...\ 2^4)\ 2^4 = 496$.

11) Nombres amiables, c'est-à-dire, deux nombres tels que chacun égal à la somme des diviseurs de l'autre. Des formes

$$A = (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n),\ B = A + 2^n,\ C = A - 2^{n-1}$$

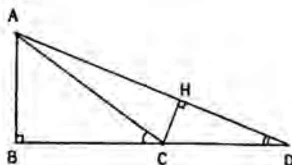
Si B et C sont premiers, différents de 2, un des nombres amiables est $2^n\ BC$. Le 2ème égal à $[2^{n+1}\ (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1]\ 2^n$

Somme des nombres contenus dans les cases d'un échiquier

Al-Qabīṣī en fait le calcul effectif 18.446. 744. 073. 709. 551. 615. Pour faire comprendre l'énormité de ce résultat, il recourt à une comparaison classique. 1^o du méridien terrestre vaut $56\frac{2}{3}$ milles, d'après les observations astronomiques ordonnées par le calife al-Ma'mūn (renvoi au livre de l'auteur: *Misāḥat al-Arḍ*, Mesure de la terre: dans le ms. *misāfat*). La circonférence de la Terre est donc 20400 milles; le diamètre est donc 6491, car Archimède a montré que $\pi = 3\frac{1}{7}$ (!). La surface de la terre d'après la règle trouvée par Archimède est 134.416.400 milles carrés, ou en coudées carrées 134.416.400x $(400)^2 = 2.118.662.400.000.000$. L'auteur ajoute que, d'après ses expériences, une feuille d'argent d'une coudée carrée pèse 500 dirhems. Par suite, en couvrant la Terre avec une feuille d'argent de la même épaisseur, le poids de la feuille sera 1.059.331.200.000.000.000 dirhems. Le nombre trouvé dans l'échiquier est $17\frac{2}{5}$ fois ce nombre.

A qui demande si l'on peut assimiler la Terre avec ses vallées et ses montagnes, ses continents et ses mers, à une sphère, l'auteur répond que si l'on représente la Terre par un globe, la plus haute montagne n'y serait qu'une rugosité, à peine sensible. Mais comment peut-on mesurer la hauteur d'une montagne, dira-t-on? Voici une règle pour cela.

Soit A le sommet d'une montagne (voir fig. 1), AB sa hauteur. De deux points C et D dont on mesurera la distance CD, on calculera les angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADC}$ grâce à un astrolabe.



Alors $AB = CD.\ \sin \widehat{D} : \left[\sin (90^o - \widehat{D}) - \frac{\sin (90^o - C) \times \sin D}{\sin C}\right]$ (1)

2) $1 + 3 + 5 + ... + (2n\text{-}1) = \left[\frac{(2n-1)+1}{2}\right]^2$. Exemple: $1 + 3 + ... + 9 = \left(\frac{9+1}{2}\right)^2 = 25$

3) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = \frac{2n}{2}(n+1)$. Exemple: $2 + 4 + ... + 12 = \frac{12}{2}(6+1) = 42$

4) $1.2 + 2.3 + ... + (n\text{-}1).\, n$. Parmi les trois nombres n, $n+1$, n-1 il y en a un divisible par 3. Multiplier son tiers par des deux autres pour avoir la somme. Soit $\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$

Exemple: $1.2 + 2.3 + ... + 9.10$. La somme est $\frac{9}{3}\, 10.11 = 330$

5) *Problème du jeu d'échecs.* On pose 2 sur la 1ère case du jeu d'échecs, 2 sur la 2ème, et ainsi de suite en doublant toujours. Quel est le total des nombres posés? Si la case de rang k contient 2^{k-1}, alors la case de rang $2k$-1 contient $(2^{k-1})^2$. Calculer alors 2^2 (3ème case), 2^4 (5ème case), 2^8 (9ème case), 2^{16} (17ème case), 2^{32} (33ème case), 2^{64} (65ème case). Le contenu d'une case diminué de 1 donne la somme des nombres précédents. Le calcul de 2^{64}-1 sera fait ultérieurement.

6) *Autre façon de remplir les cases.* Mettre 1 dans la 1ère case, 2 dans la 2ème, 6 dans la 3ème, 18 dans la 4ème, et ainsi dans chaque case, le double de ce qu'il y a dans toutes les précédentes. Si u_n est le contenu du n ème casier, alors $u_n = \frac{3}{2}\, u_n^2 - 1$.

7) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$ [Soit, d'après (1) $\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$]

9) $1^4 + 2^4 + ... + n^4 = (n^2 + \frac{n}{2})(n+1)[n(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}) - \frac{2}{30}]$

L'auteur fait remarquer que le produit des deux premièrs facteurs est un entier.

Ces trois règles sont illustrées respectivement par les sommations:

$1^2 + 2^2 + ... + 5^2$; $1^3 + 2^3 + ... + 10^3$; $1^4 + 2^4 + ... + 6^4$

naturels.[3] La proposition 11 sur la formation des nombres amiables appartient à Thābit b. Qurra (211-288 H.).[4]

Les règles ne sont pas démontrées mais illustrées par des exemples. Quelques décades plus tard, vers 402 h. al-Karajī insère dans son al-Fakhrī, la sommation:

$1.2 + 2.3 + \ldots + (n-1)\,n$, proposition 4 d'al-Qabīṣī[5] et il ajoute avec leurs démonstrations:

$$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + (n-1).n.(n+1) = \left(\sum_{1}^{n} i\right)^2 - \sum_{1}^{n} i$$

$$1.3 + 3.5 + \ldots + (2n-3).(2n-1) + 2.4 + 4.6 + \ldots + (2n-2).2n$$ [6]

Nous ne savons quel accueil l'émir Sayf al-Dawla réserva à ce mémoire. En des circonstances analogues, le prince bouyide ʿAḍud al-Dawla (324-372 h.), autre grand promoteur des lettres et des sciences, fit la moue quand son maître le grammairien et linguiste al-Fārisī lui dédia son livre *al-Īḍāḥ* (L'explication). L'ayant parcouru, ʿAḍud al-Dawla dit à l'auteur: "Il n'y a rien là-dedans que nous ne connaissions déjà. C'est bon pour des écoliers"[7] Sayf al-Dawla eût pu aussi demander à al-Qabīṣī plus de résultats nouvaux.

Propositions

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2+n}{2}$. Exemple: $1+2+\ldots+10 = \frac{10^2+10}{2} = 55$

3. Calcul de $\sum_{x=1}^{n} x^2$, chez Archimède, *Traité des spirales* voir Paul Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède* (Paris, 1960), tome 1, pp.253-255. Calcul de $\sum_{x=1}^{n} x^2$, dans la tablette babylonienne AO 6484 (Van der Waerden, *ibid*) $\sum_{x=1}^{n} x^2$ étaient comme des Romains est donc, selon toute possibilité, des Grecs. (Gino Loria, *op. cit.*, p.137).

4. Thābit b. Qurra, *Istikhrāj al-ʿadād al-mutaḥābba*, Paris ms 2457, 38, fol. 170b-180b; analysé par F. Woepcke, Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs, *Journal Asiatiques* 20ème série, tome 4 (1852), 420-429. Pour les nombres amiables chez Pythagore, voir T.L. Heath, *A manual of Greek Mathematics* (Oxford, 1931), p.42.

5. Al-Fakhrī, Le Caire ms V, 212, fol. 15b, *l.* 11.

6. *Ibid.* fol. 17a, *l.*1; fol.16b, *l.*4.

7. Al-Fārisī composera alors *al-Takmila* et ʿAḍud al-Dawla de dire "Le maître s'est fâché! Ni lui ni nous ne comprenons plus rien de ce qu'il a écrit... Yāqūt al-Ḥamawī, *Muʿjam al-udabāʾ*, (éd. Le Caire, 1936-), tome 7, p. 238.

Un mémoire d'al-Qabīṣī (4e siècle H.) sur certaines sommations numériques.

ADEL ANBOUBA*

Introduction

L'auteur loue dans son mémoire Sayf al-Dawla (émir d'Alep de 333 à 356 h.) pour l'intérêt qu'il porte aux lettres et aux sciences. Et évoquant la grande habilité de l'émir dans le calcul digital, il ajoute qu'il a réuni, pour le servir, des propositions interessantes relatives à la sommation des nombres, qu'il a trouvées éparpillées dans des écrits divers ou qu'il a découvertes lui-même.

Il est possible, en effet, que lui appartiennent :

1) La sommation des quatrièmes puissances des entiers naturels, ce qui représenterait un résultat important. (Prop. 9).

2) Le calcul d'une suite récurrentielle, extension du problème du jeu d'échecs, savoir (Prop. 9) :

$$\text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, \text{ et } u_n = 2 \sum_{i=1}^{n-1} u_i, \text{ alors } u_n = \tfrac{3}{2}\, u_{n-1}^2$$

3) Une formule trigonométrique donnant la hauteur d'une montagne. (Fin de mémoire).

En tout cas, nous ne connaissons pas de mémoire antérieur qui contienne les propositions 6 et 9.

Sont très anciennes, comme on le sait, les propositions 1, 2, 3 sur les progressions arithmétiques;[1] la proposition 5 sur la progression géométrique 1, 2, 4, ...;[2] la proposition 10 sur la formation des nombres parfaits (Euclide, IX, 36); les propositions 7 et 8 sur la somme des carrés et des cubes des entiers

*Institut Moderne du Liban, Fanar-Jdaidet, Beyrouth, Liban.

1. B. L. Van der Waerden, *Science Awakening*, 3ème éd., Groningen, p.77, 99. Gino Loria, *Histoire des Sciences Mathématiques hellènes* (Paris, 1929), p.132.

2. Van der Waerden, *ibid.* D'autre part on trouve le calcul de $\sum_{i=1}^{63} 2^i$ dans l'œuvre d'al-Khawārizmī (cité par Shujā' b. Aslam, *Kitāb al-Jabr wa'l-muqābala*, Qara Mustafa Ms 379, fo. 110°).

ملخصات الأبحاث المنشورة في القسم الأجنبي

الفلك الهندي في القرن الرابع عشر في مدينة فاس
« زيج شعري للقسنطيني »

ا. س . كندي وديفيد كينج

اسمه **ابو الحسن علي بن أبي علي** « **القسنطيني** » وهو فقيه وموقت، الف زيجاً صغيراً وجمعه على شكل كتيب فلكي يتضمن شرحاً وجداول واهداه الى السلطان المريني ابراهيم المستعين وقد اتى شرح هذا الزيج بشكل شعري ولكن مهما يكن فالسبب الرئيسي لهذه الدراسة هو ان هذا هو **العمل الفلكي الوحيد المعروف باللغة العربية** والمتضمن لنظرية الكواكب السيارة والتي هي بجوهرها هندية وليست بطليموسية وان زيج الخوارزمي مبني ايضاً على النظرية الهندية ولكن لم يبق لنا منه سوى الترجمة اللاتينية للنسخة المعدلة من قبل المجريطي .

ونقدم هنا صــــورة طبق الاصل في هذه المجلة وعلى الصفحات (41 – 22) للنسخة الوحيدة **لزيج القسنطيني** وهي نسخة الاسكوريال ورقمها ٩٠٩ عربي (Ms arab 909) .

المجموعة الاولى من الجداول هي التقاويم ويمكن استخدامها **للتحويل بين التاريخ الهجري والتاريخ الرومي** (السلوقي) وحركات الاوساط الاساسية للكواكب السيارة وجداولها التي لم تظهر في الزيج يمكن حسابها مـــن الاعداد المعطاة في النص . وان حركات الاوساط هذه هي من المغرب العربي وليست من الهند . ولها علاقة بجداول ابن البنا وبالجداول الطليطلية .

ان جداول تعديل مسارات الشمس والقمر والسيارات هي نفس جداول الخوارزمي الا انها تحول القوس الى دقائق فقط في حين ان جداول الخوارزمي تحولها في بعض الاحيان الى ثوان ونرى ايضاً جداول مقامات الكواكب السيارة ومطالع البروج في الفلك المستقيم ومطالع البروج للبلد ورؤية الهلال والكسوفات والخسوفات .

وما يلفت النظر ايضاً اننا لا نجد في زيج القسنطيني الجداول التالية :

التوابع المثلثية وعروض الكواكب السيارة واحداثيات النجوم الثابتة والبلدان وتوابع علم النجوم مع ان معظم الازياج تحويها .

ومع ان اساس الرسالة هو في انشاء « **الانحراف** » لتقسيم الزاوية الى ثلاثة اقسام متساوية فانه مفهوم ضمناً في عمل السجزي [٩ ، ص ١٢٠] انه يجب عدم استعمال انشاء كهذا ويبدو ان هذا الرأي ليس رأي المؤلف وبالتالي قد يكون انه ليس المؤلف .

ونرى ايضاً ان الباحثين اللذين عرفا في ذلك الوقت بكتاباتهما حول « **المتسّع** » **كأبي الجود والبيروني** لم يستعملا انشاء الانحراف . لقد استعمل ابو الجود الاشكال المخروطية وكان اكثر اهتماماً بالطرق الجبرية في حين ان البيروني مثل الانشاء على انه قليل الاستعمال في الاعداد .

والخلاصة

ان هذه الرسالة هي **عمل مؤلف عالم هندسي مجهول من القرن العاشر** وهناك شاهد آخر أبعد هو **تأثير وسيلة بني موسى على الرياضيات العربية في العصر الوسيط** .

رسالة نصر بن عبد الله في استخراج سمت القبلة

ريتشارد لورتش

ألف نصر بن عبد الله الملقب بالعزيزي – استناداً إلى سزكين (ج ٥ ، ص ٣١٤ ؛ ج ٦ ، ص ٢٠٨) – مقالات في الكسوف والخسوف **ورسالة في أن الأشكال كلها من الدائرة** . أما بشأن عصره فالشاهد الوحيد يظهر في مقطع ورد في بداية رسالته الأخيرة يقول فيه إنه قد أنجز كتاباً لخزانة الملك المنصور . بيد أن مصنف المخطوط يعتبر وبثقة تامة أن الملك المنصور هو نفس السلطان منصور عضد الدولة . وبذلك يحدّد عصر نصر بن عبد الله في النصف الثاني من القرن الرابع الهجري/العاشر الميلادي ؛

إن الآلة التي يصفها الكاتب هنا هي إحدى الآلات المحدودة العدد التي يمكن بها استخراج سمت القبلة هندسياً . إذ تستخرج وجهة القبلة بآلات أخرى مثل الربع المجيب تتبع حسابات مثلثاتية ، وتوجد آلات كثيرة يمكن من خلالها حساب القبلة منها دائرة المعدل حيث المحاريب في داخل دائرة الأفق . وتتلخص طريقة نصر بن عبد الله في رسم بياني أساسي يطوي أقواس الدوائر العظمى مباشرة على نصف الكرة . توضع نصف الكرة AGBD تنصفها كلتا الدائرتين المتعامدتين AEB و DEG بشكل تتجه معه B نحو الشمال . اذا كانت φ تمثل خط عرض المكان المطلوب و ΔL فضل الطول بين المكان ومكة و φ_M عرض مكة ، فالشكل (١) يمثل باختصار المراحل المتبقية من العملية .

$BZ = \varphi$ حيث Z هي القطب الشمالي

نرسم خط الاستواء GHD بالاتجاه المعاكس للقطب Z

$HT = \Delta L$

نرسم LZTK

$TM = \varphi_M$

حيث M هي موضع مكة

نرسم EMN حيث DN هي سمت مكة

لإنشاء هـــذا التركيب على نصف كرة ، على المرء أن يستعمل أداتين لرســـم الدوائر العظمى : الفرجار لرســـم الدائرة إذا عرفت نقطـــة القطب ، والمسطرة للمطابقـــة والملاءمة ، إذا كانت نقطتان من الدائرة معلومتين . هذا ويجب ان تكون المسطرة مدرجة للتأشير على العرض وعلى فضل الطول . لم ينوه الى طبيعة هاتين الأداتين ، لكن جاء وصف الفرجار المناسب في كتب المعرفـــة "**Libros del Saber**" القرن الثالث عشر ، ووصف المراكشي مسطرة مناسبة تستعمل في آلة « ذات الكرسي » . ووردت نفس الطريقة من حيث جوهرها عند عبد الرحمن الخازني في التطبيق الخامس عشر في « الكرة التي تدور بذاتها » . في هذه الحالة حيث تم تأشير القطب ودائرة الاستواء ، تبقى العلامة الإضافية الوحيدة في الكرة هي نقطة موضع مكة ؛ وتستخدم المسطرة للوصل بين هذه النقطة وسمت المكان لإيجاد سمت مكة على دائرة الأفق . بما أن الكرة استعملت هنا فقط كما استعملت « في ذات الكرسي » فإن أبحاثاً لاحقة يمكنها إبراز هذه الطريقة في تحديد وجهة القبلة من خلال رسائل أخرى عن هذه الآلة . ومن بين استعمالات الأسطرلاب الكريّ المزود بنظام إحداثي أفقي استخراج سمت مكان ما نسبة إلى مكان آخر . أما الطريقة المرادفة باستعمال الدوائر المسقطة فقد أوجدت القبلة بواسطة ربع المقنطرات . ومن المدهش ان الوفائي لم يكيف آلته « دائرة المعدل » لهذه الغاية فهي تحتاج إلى أن تدرّج فيها نصف دائرة الرؤية الدوارة ، والى مربع آخر ينتصب عمودياً على دائرة الأفق .

يقول نصر بن عبد الله إنه كان قد كتب سابقاً في هـــذا المجال كتيباً يبدو أنه ضاع وهو حول « تركيب الأفلاك » يحتمل أن تكون له علاقة بكتب الفلك التي هي من مدرسة « فرضيات » بطليموس .

اعادة ترتيب
مخطوط عربي في الرياضيات والفلك
بانكيبور ٢٤٦٨

جان بيتر هوخندايك

يضم المخطوط العربي بانكيبور ٢٤٦٨ في المكتبة الشرقية العمومية في بتنه (الهند) مجموعة نفيسة تزيد على ٤٠ رسالة في الرياضيات والفلك الاسلاميين كتبت في القرن السابع للهجرة . أعيد تجليد المخطوط في الماضي فاختفى من جراء ذلك العديد من اوراقه كما ضاع واختل ترتيب اجزائه .

ثم قامت عملياً دائرة المعارف العثمانية في حيدر آباد بطبع كامل المخطوط متبعة الغلط نفسه في ترتيب اوراقه مما أدى الى اضطراب النص المطبوع في اثنتين من رسائل البيروني : **استخراج الأوتار** ، **افراد المقال في أمر الظلال** ، وفي رسالتين لابن سنان : **الهندسة وعلم النجوم** ، **كتاب في حركات الشمس** . في المخطوط كما في النص المطبوع توجد قطع من ثلاثة أعمال اخرى غاية في الأهمية في تاريخ الرياضيات والفلك الاسلاميين لم يعرف لها نسخ أخرى قط ، وهي :

١ــ مقالة في التحليل والتقطيع في التعديل . للبيروني

٢ــ المسائل المختارة . لابراهيم بن سنان

٣ــ مقالة في أن لوازم تجزيء المقادير الى لا نهاية قريبة من امر الخطين اللذين يقربان ولا يلتقيان في الاستبعاد . للبيروني .

وفي عام ١٩٦٠ قدم احمد سعيدان وصفاً للنص المطبوع محاولاً مبدئياً تحقيق القطعتين ١ و ٢ دونما رجوع الى المخطوط . أما القطعــة الثالثة فقد حققهــا في عام ١٩٧٧ بولجاكوف وأحمدوف .

يصف البحث المخطوط وصفاً مفصلاً . والمخطوط عبارة عن خمسة أجزاء متتابعة ، تمت الإشارة إليها في الفصل الثاني من البحث . أما فهرس المحتويات فقد أدرج في الفصل الثالث بالترقيم الحالي للمخطوط ، وبترقيم معدل رآه كاتب البحث أقــرب الى الأصل – أو ربما كان كذلك – معتمداً في ترقيمه المعدل هذا فهرس سزكين « تاريخ التراث العربي » ، والنصوص المطبوعة في دائرة المعارف العثمانية والدراسات المعاصرة الوثيقة الصلة بالموضوع . في الفصل الرابع تحقيق دقيق ومحكم للقطعة الأولى استناداً الى أعمال أخرى للبيروني . وفي الخامس تحقيق القطعة الثانية استناداً الى مقطع من مؤلَّف للعالم الهندسي أحمد بن محمد بن عبدالجليل السجزي (القرن الرابع الهجري) . أما الفصل السادس ففيه مناقشة مقتضبة حول القطعة الثالثة .

ملاحظات لمن يرغب الكتابة في المجلة

١ – تقديم نسختين من كل بحث أو مقال إلى معهد التراث العلمي العربي . طبع النص على الآلة الكاتبة مع ترك فراغ مزدوج بين الأسطر وهوامش كبيرة لأنه يمكن أن تجرى بعض التصحيحات على النص ، ومن أجل توجيه تعليمات إلى عمال المطبعة . والرجاء ارسال ملخص يتراوح بين ٣٠٠ – ٧٠٠ كلمة باللغة الانكليزية إذا كان ذلك ممكنا وإلا باللغة العربية .

٢ – طبع الحواشي المتعلقة بتصنيف المؤلفات بشكل منفصل وتبعا للارقام المشار إليها في النص . مع ترك فراغ مزدوج أيضاً ، وكتابة الحاشية بالتفصيل ودون أدنى اختصار .

أ – بالنسبة للكتب يجب أن تحتوي الحاشية على اسم المؤلف والعنوان الكامل للكتاب والناشر والمكان والتاريخ ورقم الجزء وأرقام الصفحات التي تم الاقتباس منها .

ب – أما بالنسبة للمجلات فيجب ذكر اسم المؤلف وعنوان المقالة بين أقواس صغيرة واسم المجلة ورقم المجلد والسنة والصفحات المقتبس منها .

ج – أما إذا أشير إلى الكتاب أو المجلة مرة ثانية بعد الاقتباس الأول فيجب ذكر اسم المؤلف واختصار لعنوان الكتاب أو عنوان المقالة بالاضافة إلى أرقام الصفحات .

أمثلـــــــة :

أ – المطهر بن طاهر المقدسي ، كتاب البدء والتاريخ ، نشر كلمان هوار . باريس ١٩٠٣ ، ج ٣ ، ص ١١ .

ب – عادل انبوبا ، « قضية هندسية ومهندسون في القرن الرابع الهجري ، تسبيع الدائرة » ، مجلة تاريخ العلوم العربية . مجلد ١ ، ١٩٧٧ ص ٧٣ .

ج – المقدسي ، كتاب البدء والتاريخ ، ص ١١١ .
انبوبـــــــا ، « قضية هندسية » ، ص ٧٤ .

المشاركون في هذا العدد

عادل انبوبا : يعمل في ميدان تاريخ الجبر والهندسة ، وقد درس مادة تاريخ العلوم العربية في الجامعة اللبنانية وفي الكلية الفرنسية للاقتصاد في بيروت .

ج. ل. برغرن : أستاذ الرياضيات في جامعة سيمون فريزر في كولومبيا البريطانية / كندا . له كتاب تحت الطبع (أحداث في تاريخ الرياضيات العربية في العصر الوسيط) (بالانكليزية) .

رشدي راشد : مدير أبحاث في المركز الوطني للبحث العلمي – معهد تاريخ العلوم – جامعة باريس . تضم منشوراته العديدة في تاريخ الجبر والهندسة تحقيقاً ودراسة نقدية لجبر الخيام .

لوتس ريشتر – برنبورغ : مساعد في حلقة الدراسات العربية في جامعة جوتنجن . اهتمامه منصب على تاريخ الطب بخاصة وعلى تاريخ الحضارة العربية الاسلامية في العصر الوسيط بعامة .

جورج صليبا : أستاذ مساعد في الدراسات العربية الاسلامية في قسم الشرق الأوسط في جامعة كولومبيا. يركز اهتمامه حول العلوم الدقيقة الاسلامية في العصر الوسيط . يقوم حالياً بتحقيق أعمال الفلكيين الدمشقيين مؤيد الدين العرضي وابن الشاطر .

اورسولا فايسر : حققت كتاب العلل « سر الخليقة وصنعة الطبيعة » لبلينوس الحكيم ، نشره لها معهد التراث العلمي العربي . تعمل حالياً في حقل تاريخ الطب وعلم الأحياء عند العرب .

ميرسيه فيلادريش : تتابع اهتمامها في ترجمة الأعمال الفلكية العربية إلى اللغتين اللاتينية والاسبانية في جامعة برشلونه .

أ. س. كندي : أستاذ متقاعد في الجامعة الأميركية في بيروت له عدة مؤلفات ومقالات في الفلك والرياضيات الاسلاميين .

ديفيد كينج : أستاذ مشارك في مادتي اللغة العربية وتاريخ العلوم بجامعة نيويورك . مؤلفاته في علم الفلك العربي – الاسلامي عديدة .

ريتشارد لورتش : عمل عامين في معهد التراث العلمي العربي ، يعمل حالياً في لجنة كيبلر التابعة لأكاديمية العلوم / باير (في ميونيخ) .

جان بيتر هوخنديك : نال درجة الدكتوراه في تاريخ الرياضيات من جامعة اوترخت / هولندا . تضمنت اطروحته دراسة حول إحياء ابن الهيثم لكتب ابيلونيوس في القطوع .

NOTES ON CONTRIBUTORS

Adel Anbouba works on the history of algebra and geometry. He has taught the history of Arabic Science at the Lebanese University and at the French Faculty of Economics.

J. L. Berggren is a professor of mathematics at Simon Fraser University, British Columbia. His book *Episodes from the History of Medieval Arabic Mathematics* is in press.

Jan Hogendijk has recently got his Ph. D. in the History of Mathematics from the University of Utrecht. It is a study of Ibn al- Haytham's restoration of the lost eighth book of Apollonius' *Conics*.

E. S. Kennedy is professor emeritus at the American University of Beirut. He has written many books and articles on astronomy and mathematics in medieval Islam.

David A. King is associate professor of Arabic and history of science at New York University. He has published extensively on medieval Arabic astronomy.

After two years at the IHAS, **Richard Lorch** is now back in Munich, where he is working at the Kepler Kommission of the Bayerische Akademie der Wissenschaften. In May and June 1983, he was Visiting Professor at the Universty of Hamburg, most of his lectures being on medieval Arabic Science, and technology.

Roshdi Rashed is director of research at the CNRS Institute for the History of Science, University of Paris. His many publications on the history of algebra and geometry include a critical edition of ʿUmar al-Khayyâm's *Algebra* (IHAS, 1981).

Lutz Richter-Bernburg is Assistant at the Seminar für Arabistik; University of Göttingen. His interests include the history of medicine as well as general history of medieval Islam.

George Saliba is assistant professor of Arabic and Islamic sciences, Department of Middle East Languages and Cultures, Columbia University. He is interested in the exact sciences in medieval Islam. He is preparing an edition of the astronomical works of Mu'ayyad al-Dīn al-ʿUrḍī and Ibn al-Shāṭir, both of Damascus.

At the University of Barcelona, **Mercè Viladrich** is pursuing her interest in the translation of Arabic astronomical works into Latin and Spanish.

Ursula Weisser is the editor of the cosmological treatise *Sirr al-Khalīqa*, published by the Institute for the History of Arabic Science. She is working on the history of Arabic biology and medicine.

Moreover, several passages in the Alphonsine treatise have such striking similarities with the corresponding ones in the pseudo-Māshā'allāh's Latin text that we might very well suggest that one of them is a direct translation of the other. This leads us to the contributions made, in 1951, by G. Menéndez Pidal on the translation techniques of thv Alphonsine School. According to him, in the first period of translations (1250-60) one of the translators who knew Arabic dictated a translation of the text into Castillian and this was re-translated orally into Latin by another scholar, while a scribe copied it out; the originality of the alphonsine translations lies in the introduction of an intermediate link consisting in a scribe who copied out the Castillian version[9]. If we accepted Menéndez Pidal's hypothesis, then it might be tempting to consider that in some of the chapters of *De Compositione Astrolabii* we might have the remains of an Alphonsine Latin version for which the Castillian version would be the intermediate link[10].

9. G. Menéndez Pidal, "Como trabajaron las escuelas alfonsiés", *Nueva Revista de Filología Hispánica*, year V, no. 4 (Mexico, Cambridge Mass., 1951) pp. 363-380.

10. About the alphonsine treatise and the hispanic tradition on the plane astrolabe see:

M. VILADRICH and R. MARTÍ, *En torno a los tratados hispánicos sobre construcción de astrolabio hasta el siglo XIII*. Textos y Estudios sobre Astronomía Española en el siglo XIII. Barcelona, 1981, 79-99.

R. MARTÍ and M. VILADRICH, *Las tablas de climas en los tratados de astrolabio del manuscrito 225 del "Scriptorium" de Ripoll*, "LLull," (Boletín de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias) 4, 1981, 117-122.

R. MARTÍ y M. VILADRICH, *En torno a los tratados de uso de astrolabio en al-Andalus, la Marca Hispánica y Castilla hasta el siglo XIII*. Nuevos Estudios sobre Astronomía Española en el siglo de Alfonso X. Barcelona 1983, 9-74.

M. VILADRICH y R. MARTÍ, *Sobre el "Libro dell Ataçir" de los Libros del Saber de Astronomía de Alfonso X el Sabio*, ibidem, 75-100.

Chap. II. Aptatio Rethis sive Tele Aranee seu Valzagore Rubrica.	*Chap. VII.* De cuemo deue seer entallada la red dell astrolábio.
Chap. 13. De inscriptione almucantharach capitulum.	*Chap. VIII.* De cuemo se deuen fazer las láminas en que son los almocantarat et los azimut et las oras et primeramientre de cuemo deuen seer fechos los almocantarat en ellas.
Chap. 14. De Divisione e orizontis et ayzimucht per arcum.	*Chap. IX.* De cuemo deuen seer fechos los azimut.

It is now appropriate to recall the contribution made by J. Samsó[6] whose principal aim was to suggest that the notes on Ptolemy's *Planisphaerium* by the Xth century astronomer Maslama al-Majrīṭī are one of the sources used to compile the *Libro del Astrolabio Llano* by Alphonso X the Wise. He bases his argument on the coincidences and parallelisms that could be established between Maslama's work and chapters V, VI, and IX of the Alphonsine book, which respectively concern the division of the ecliptic in signs and degrees, the projection of the fixed stars onto the spider and the tracing of the azimuthal circles. As has been observed, these are some of the very chapters which identify most closely with those bearing the same content in the section of the text *De Compositione Astrolabii* contained within chapters 7 to 16.

The relationship that can therefore be established between the three texts allow us to suggest the hypothesis of the attribution of chapters 7 to 16 of *De Compositione Astrolabii* to Maslama's School. This hypothesis seems to receive support from Kunitzsch's remark on the *explicit* appearing in some manuscripts of the pseudo-Māshā'allāh, at the end of the chapter 16 (*Finit opus astrolabii secundum Marcellania*): according to him "the name given in the MS is unequivocally a transcription of the Arabic Maslama".[7] At the same time, this would lend further support to the relationship established by Samsó between Maslama's notes on Ptolemy's *Planisphaerium* and the Alphonsine *Libro del Astrolabio Llano*. Even if Maslama never actually wrote a complete treatise on the construction and use of the astrolabe, it is likely that his disciples Ibn al-Ṣaffār and Ibn al-Samḥ were aware of his methods. Bearing in mind that we have knowledge of a lost book by Ibn al-Samḥ on the construction of the astrolabe, and knowing that he was a well-known author at the Alphonsine court,[8] we might consider the possibility of identifying part of a Latin version of this lost text with chapters 7-16 of *De Compositione Astrolabii*.

6. J. Samsó "Maslama al-Majrīṭī and the Alphonsine Book on the Construction of the Astrolabe". *Journal for the History of Arabic Science* (Aleppo, 1980), vol. 4, pp. 3-8.

7. P. Kunitzsch "On the authenticity...." p. 46.

8. See J. Samsó, "Maslama al-Majrīṭī ..." (see note 6), p. 8. For Ibn al-Samḥ see F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. 6 (Leiden: Brill, 1978), p. 249.

gradus ex Geminis.[3]	grados de cancro.
Hunc divides universum ciruculum signorum per singulos gradus,	Et en exiemplo desto sobredicho podrás partir todo el cérculo sobredicho de los signos por grados ó por qual cuento quisieres.
ut patet in figura.	Et esta es la figura desto que auemos dicho.
(R. T. Gunther, *Chaucer and Messahalla on the astrolabe*, pp. 204-205).	(Rico y Sinobas, *Libros* II, pp. 232-233.)

Recently, P. Kunitzsch[4] has put forward a whole series of arguments about the origins of the text published by R. T. Gunther. He claims that the treatise in question is, in fact, a compilation of different texts written between the Xth and the XIIIth centuries, some of them literal translations from the Arabic into Latin[5]. Although it is not possible, as yet, to establish the exact origins of all the materials of which the text consists, Kunitzsch does point out that it is wrong to attribute to Māshā'allāh the section to the treatise *De Compositione Astrolabii* which includes chapters 7 to 16. It is precisely this part of the treatise which is related to the Alphonsine text, as is shown in the following list of chapter-headings, which demonstrates the correspondences between the two texts:

Chap. 7. Preambulum ad Compositione Rethis et Tabularum Altitudinis.	*Chap.* III. De cuemo se deue fazer la red et primeramientre de cuemo deuen seunalar en ella el cérculo de capricornio et de aries et de libra et el cérculo de cancro.
Chap. 8. De constitutione Zodiaci et eius divisiones.	*Chap. IV.* De cuemo deue seer fecho el cérculo de los signos dell astrolabio
Chap. 9. De divisione circuli signorum sive Zodiaci Capitulum.	*Chap. V.* De cuemo deue seer partido el cérculo de los signos.
Chap. 10. Sequitur de inscripcione Stellarum fixarum in Rethe in eius Zodiaco.	*Chap. VI.* De cuemo se deuen poner las estrellas fixas en la red.

3. This difference between the two texts is due to Gunther's correction (see R. T. Gunther, p. 205, footnote I).

4. See P. Kunitzsch "On the authenticity of the treatise on the composition and use of the astrolabe ascribed to Messallah", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* vol. 31, no 106, 1981, pp. 42-62.

5. See P. Kunitzsch "On the authenticity ..." p. 43-48.

bd in puncto *k*, deinde
extrane dyametrum *bd* in directo,
donec abscindat circulum signorum
super *h*. Tunc punctus *a* erit
punctus capitis Libre,
et punctus *h* Capricorni,

et punctus *c* Arietis, et punctus

z capitis Cancri.
Post hoc pone arcum *dl* et arcum *bm*
unumquemque scilicet istorum ex
30 gradibus. Deinde queres arcum
qui est super punctum *m* et *k*
et *l* et abscindet circulum
signorum super *ns*,

eritque *hs* arcum signum Sagitarii,

et arcus *zn* signum Geminorum.
Post hoc pones unumquemque ex
arcubus *lg* et *mf* 30 gradus.
Deinde queres arcum qui vadit per
puncta *f*, *k*, *g* et absicindet circulum
signorum super *qx*,
eritque arcus *sx* signum
Scorpionis, et arcus *nq*
Tauri, et remanebit arcus *xa*
signum Libre, et arcus
qc signum Arietis.
Post hoc pone arcum *ho*
sicut arcum *hs*
et arcum *or* sicut arcum *sx*,

eritque *rc* signum
Piscium et arcus *ro* signum
Aquarii, et arcus *ho* signum
Capricorni. Postea etiam pones
arcum *zv* sicut arcum
zn et arcum *vp* sicut
arcum *nq*, eritque arcus *ap*
signum Virginis et arcus *pt*
signum Leonis, et arcus *vz*
signum Cancri. Et similiter
si poneres arcum
dl 3 gradus, et arcus
bm similiter esset
arcus *hs* 3 gradus ex
Sagittario et arcus *zn* 3

de *db* sobrel punto de *q* et desende
saca el diámetro de *bd* en drecho
fata que taíe el cérculo de los signos
en el punto *dr* h et sera el punto de *a*
el punto de la cabeça de libra
et sera el punto de *h* el punto de la
cabeça de capricornio
et el punto de g sera el punto de la
cabeça de aries et el punto de
z sera el punto de la cabeça de cancro
Et desende faz en ell archo de *dlbm*
cada uno dellos de
XXX grados et farás un archo
que passa por el punto de *m* et de *q*
et de l et taíará el cérculo
de los signos en los dos puntos de *n* et
de *p*
et será ell archo de *hp* el signo de sa-
gittario
et ell archo de *zn* el signo de gémini.
Et desende farás otrossí cada uno de
los archos de *lxmf* XXX grados
et farás un archo que passe por
el punto de *fqx* et taíará el cérculo
de los signos en los dos puntos de *kc*
et será ell archo de *pc* el signo de
escorpion et ell archo de *nk* el signo de
tauro et fincará ell archo de

kg el signo de aries.
Et desende farás ell archo de *hs*
tamanno cuemo ell archo de *hp*
et ell archo de *so* tamanno cuemo ell
archo de *pc*
et será ell archo de *go* el signo
de piscis et ell archo de *os* el signo
de aquario et ell archo de *sh* el signo
de capricornio. Et desende farás otrossí
ell archo de *zx* tamanno cuemo ell archo
de *zn* et ell archo de *xo* tamanno cuemo
ell archo de *nk* et será ell archo de *ao*
el signo de virgo et ell archo de *ox*
el signo del leon et ell archo de *xz*
el signo de cancro. Et
si ouieres puesto de primero ell archo
de dl por tres grados et ell archo
de *bm* por otros tres sería
ell archo de *hs* tres grados de
capricornio et ell archo de *zx* tres

NOTES AND COMMENTS

On the Sources of the Alphonsine Treatise Dealing with the Construction of the Plane Astrolabe

MERCÈ VILADRICH*

The aim of this paper is to demonstrate that some of the chapters of the Alphonsine book on the construction of the plane astrolabe are a translation - in some cases only a partial translation and in others a complete translation - of the same Arabic original used as the source for part of the *De Compositione Astrolabii* attributed to the astrologer Māshā'allāh, who lived in Bagdad in the second half of the eighth century A. D., and published by R. T. Gunther[1] To show some of the similarities between the two texts, I give below, in two parallel columns, the chapter from the Latin text published by Gunther and the corresponding passage from the Alphonsine treatise,[2] which deal with the division of the Zodiac:

9. *De divisione circuli signorum sive Zodiaci Capitulum.*	V. *De cuemo deue seer partido el cérculo de los signos*
Cumque feceris circulum signorum	Quando ouieres fecho el cérculo de los signos
oportet te postea dividere eum per signa et gradus signorum,	déuesle partir por los signos et por los grados de los signos.
cuius rei exemplar est ut facias circulum capitis Arietis et Libre qui est *abcd* et diametra abscindant se super circulum signorum *azch*.	Et dámoste á esto exiemplo que fagas el cérculo de aries et libra et este cérculo de *abgd* et los dos diámetros se ayuntarán sobrel punto de e et escreuirás sobrel cérculo de los signos *azgh*
Deinde divides *abcd* per 360 gradus.	et desende parte el cérculo de *abgd* por CCC et LX partes eguales
Post hoc pone arcum *et* similem dimidio tocius declinationis.	et faz ell archo de *gt* tamanno cuemo la meatad de la declinacion general
Deinde iunge a cum *t*,	et desende llega la a con la *t*
et abscindet linea *at* dyametrum	et taiará la linna de *at* el diametro

* Facultad de Filología, Universidad de Barcelona. Barcelona.

1. R. T. Gunther, *Early Science in Oxford*, vol V: *Chaucer and Massahalla on the astrolabe*, (Oxford, 1929) pp. 195-231. I am grateful to J. D. North, who sent photocopies of this edition to Barcelona.

2. Rico y Sinobas, *Libros del Saber de Astronomia*, vol II, (Madrid, 1863) pp. 242-252. See a fairly recent survey on Alphonsine astronomical works and King Alfonso's collaborators in D. Romano "Le opere scientifiche di Alfonso X e l'intervento degli ebrei". *Oriente e Occidente nel Medioevo: Filosofia e Science*, Accademia Nazionale dei Lincei (Roma, 1971) pp. 677-711.

phy of the respective author (pp. 75-96). The bibliography includes a list of the existing editions of medieval Arabic treatises on the subject and a list of selected studies on Arabic chemistry and alchemy. The volume is rounded off by an Arabic-German glossary of technical terms.

These carefully prepared and annotated readings can be warmly recommended to everyone who wants to get acquainted with the medieval (al)chemical literature of the Arabs, especially to beginners in the Arabic language. Teachers in the history of Arabic science will also welcome this chrestomathy as a valuable – and long overdue – auxiliary for university courses. It is to be hoped that further source-books of this kind will soon follow!

URSULA WEISSER

Institut für Geschichte der Medizin
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Quellengeschichtliches Lesebuch zur Chemie und Alchemie der Araber im Mittelalter (*Kitāb fī ʿIlm aṣ-ṣināʿa*). Herausgegeben von Karl Garbers und Jost Weyer (Quellengeschichtliche Lesebücher zu den Naturwissenschaften der Araber im Mittelalter, Bd. 1). Hamburg: Buske 1980. XII, 114 pp. DM 19.80.

This bilingual source-book contains a collection of short medieval chemical and alchemical texts in the original Arabic language with facing German translation. It is the first volume of a new series of anthologies on Arabic science edited by the Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Technik of the University of Hamburg (Germany), which are intended primarily for university students. The establishment of such a series may be regarded as an indication for the growing awareness among western historians of science that, in view of the important role played by Muslim scholars in the general development of science, a certain knowledge of the Arabic language is a desireable qualification for everyone working in this field. To promote the spread of this knowledge is the principal aim of the new "Lesebücher". Didactically prepared texts will help the beginner to familiarize himself with terminology and linguistic peculiarities of Arabic scientific prose. At the same time, he can get a first orientation in the history of the particular science in medieval Islam, its methodology, standards and achievements.

The chrestomathy reviewed here is a cooperative work of Karl Garbers, one of the last surviving pupils of the great Julius Ruska, and Jost Weyer, an historian of chemistry with particular interest in alchemy, who is responsible for the choice of texts. Most of the 28 Arabic passages presented here are taken from works which have appeared in print before. The selection, which includes sections from treatises by Jaʿfar aṣ-Ṣādiq, Jābir ibn Ḥayyān, al-Kindī, Abū Bakr ar-Rāzī, Ibn Umayl, Ibn Sīnā, al-Hamadānī, al-Khāzinī, Abū l-Qāsim al-ʿIrāqī and the encyclopedist al-Qazwīnī, seems to be fairly well-balanced. The various aspects of medieval chemistry, alchemy and theory of matter as well as practical chemistry, are adequately considered. A minor short-coming is perhaps the extreme brevity of some of the excerpts; none of them comprises more than two pages, and several are considerably shorter. All texts have been provided with a new German translation by Garbers, whose close rendering of the Arabic wording will be appreciated by readers to whom the language of the original still presents some difficulties. The second part of the book comprises the commentaries written by Weyer. He starts with a concise historical introduction to the background and evolution of Arabic alchemy and chemistry and to the main problems the medieval alchemists were concerned with (pp. 53-73). There follow technical and terminological annotations to each single text, preceded by a short biogra-

Reference Books for the Historian of Science: a Handlist, compiled by **S. A. Jayawardene** (London: Science Museum Library, Occasional Publications 2, 1982). xiv + 229 pages. £ 2.50.

This *Handlist* contains well over a thousand items and is divided into forty-four sections arranged under headings "The History of Science and its Sources", "History and Related Subjects", and "General Reference". It includes for instance, sections on biographies, patents, theses, international exhibitions, scientific manuscripts, historical method, and encyclopaedias.

In the field of medieval science there are some noticeable omissions: e.g. A. B. Emden's bio-bibliographical works, such as his *A Biographical Register of the University of Oxford to A.D.* 1500 (Oxford, 1957-9); F. E. Peters, *Aristoteles Arabus. The Oriental Translations and Commentaries on the Aristotelian Corpus* (Leiden, 1968); and F. Stegmüller, *Repertorium Commentariorum in Sententias Petri Lombardi* (Würzburg, 1947; supplement by R. P. V. Doucet, Florence, 1954). More serious is the omission of Brockelmann's *Geschichte der arabischen Literatur* and supplements (Leiden, 1898-1942) and J. D. Pearson's *Index Islamicus.* These and similar oversights will reduce the value of the *Handlist* for the beginning student, though such specialist works can doubtless be found through the references that the *Handlist* does give. But, as every maker of bibliographies knows, it is easier to carp than to compile. Besides, the strength of the *Handlist* lies in its general reference and history sections.

Not only will the *Handlist* give the student a useful survey of bibliographical resources, but it will save almost every historian of science many hours of tedious work. To take one example, in section XII there are bibliographical details of the *Proceedings* (and related literature) of all the International Congresses of the History of Science.

The *Handlist* is well produced, with clear type and ample margins (and over twenty pages of blank paper at the end, no doubt for the user's *addenda*). There are two execllent indexes: author/title and subject. At £ 2.50 the book is remarkably good value.

RICHARD LORCH

Institute for the History of Arabic Science
Aleppo University.

7 – Anyone working with manuscript sources sympathizes with Sezgin's difficult task of identifying the authorship of those manuscripts. What Sezgin does in the doubtful or anonymous cases is to try to determine the authorship by internal evidence (e.g. p. 106, 149 n.1.), select important identifying items for future researchers (pp. 128, 170), and does not refrain from correcting catalogue entries Whenever they exist (e.g. pp. 128, 131), or even correct secondary literature on the subject (pp. 133, 290). If all attempts fail, he hopes that future research will reveal the authorship, and to facilitate that research he gives the reader detailed contents of the manuscript with full incipits and key phrases (e.g. 184, 305).
8 – Manuscripts existing in fragments are identified as such and an attempt is made to bring together parts that are scattered in libraries as far apart as Damascus and Munich (p. 163).
9 – While discussing specific topics, Sezgin goes through voluminous works in an attempt to isolate the relevant material, although these works may already exist in print as belonging to other subject matter. Anyone interested in the problem of tides will find it very convenient to know that the subject was discussed by Mas'ūdī in *Murūj* I, 244f, as already identified by Sezgin.
10 – Finally, this reviewer has nothing but admiration for the kind of labor Sezgin must have gone through in order to sift the multivolume work of Ibn Sīdah in search for its sources that are mainly lost, or in search of material relating to astrology or meteorology (pp. 365 - 369).

The following notes are given in the hope of being incorporated in the future "Nachträge".
1 – p. 26. The attack of 'Alī b. 'Īsā al-'Asṭurlābī against astrology was used by Ibn Qayyim al-Jawziyyah in his *Miftāḥ Dār al-Sa'ādah*, Beirut ed. vol. 2, p. 148f.
2 – p. 43. The *tafsīr* of Ṭabarī of the *Tetrabiblos* is extant in Uppsala 203.
3 – p. 43. An early copy of Ḥunain's translation of the *Tetrabiblos* is extant in Escorial 1829.
4 – p. 132. Kindī's treatises 8, 9, and another one on astrology were published by L. V. Vaglieri & G. Celentano in "Trois Épîtres d'Al-Kindī", *Annali, Instituto Orientali di Napoli* 34 (ns. xxiv) 1974, pp. 523 - 562 giving the text in facsimile and a French translation.
5 – p. 223. Another fragment of Theophrastus's meteorology is extant in Aligarh, University Collection 119.

George Saliba

Department of Middle East Languages and Cultures
Columbia University, New York, NY, 10027.

feel, as this reviewer does, the debt to Sezgin's patience and dedication.

The following remarks are organized in two main types: A) an attempt is made in the first set of notes to isolate the main features that distinguish this work from others comparable to it, and B) a few additional remarks are supplied in the hope that they may be considered for the future "Nachträge" which I am sure will appear in the forthcoming volumes in this series.

1 – After placing astrology and meteorology in their proper context within the Arabic literary tradition (7 – 14, 205 f), unlike the authors of comparable works, Sezgin goes to great length in evaluating the works of specific authors whenever he thinks that such works are of major importance in that tradition (cf. e.g. the evaluation of the meteorological works of Ibn al-ʿAmīd 278f, and those of Ibn Sīnā 292f) .

2 – In his detailed discussion of early Arabic astrology (8, 163) Sezgin correctly notes that at least during the Umayyad period (p. 8) astrology was closely related and depended on political power for its survival.

3– In the same area of general observations, it is significant to note with Sezgin that most of the Arabic astrological works that were translated into Latin in the Middle Ages were not of the mathematically technical type (p. 13). The whole topic of that transmission, however, has yet to be studied in detail.

4 – Unlike the authors of comparable works, Sezgin continues to exploit every primary source he can lay hands on, be it published or in manuscript form, to collect the data he needs for bio-bibliographical information, and thus brings to light works of which we should otherwise have been unaware (cf. e.g. 18, 19, 81, 93,129, 343, *et passim*). To give an example of the width of the range of the research,we note that Sezgin has gone through the multivolume *Murūj al-Dhahab* of Masʿūdī to collect the information on Ḥunain Ibn Isḥāq's *al-Masā'il al-Ṭabīʿiyyah* from volume VII of Masʿūdī's work (p. 267). In another instance he goes through the treatise of Ibrāhīm ibn Sinān on the movement of the sun–which belongs properly in astronomy – to define Ibrāhīm's position on Aristotle's meteorology (p. 274). Finally, Sezgin does not shy away from going through voluminous Arabic philological works to gather information on Arabic meteorology.

5 – Several times Sezgin goes beyond the short references to earlier sources and tries to analyze the contents of the manuscripts he is surveying in order to determine their possible sources (p. 249) or originality (pp. 263, 274), or to draw attention to their importance for specific subjects (p. 146 astrology and *ghayb*. p. 155 astrology and medicine, p. 163 astrology in war).

6 – At other times he quotes the manuscripts at great length to highlight their importance, thereby rendering an incomparable service to the reader who has neither the time nor the means to investigate these manuscripts first hand (cf. e.g. p. 85, 164 – 165, 172, 314, 359 *et passim*).

Book Review

Fuat Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, Bd. VII, Astrologie – Meteorologie und Verwandtes bis ca. 430H., xvi + 486p., bibliog., indices, Leiden: Brill 1979.

Students of Arabic and Islamic studies need no introduction to the works of Sezgin, for the early volumes of this series are now standard references for the early period of Arabic studies. In this volume Sezgin adheres to the method he followed in the earlier volumes, and once more the student of the History of Arabic Science is treated to a detailed reference work, this time on Arabic Astrology, Meteorology and related matter.

This volume is divided into two major parts: 1) Astrology and 2) Meteorology. Under each division Sezgin reviews the state of the art, the sources of our knowledge of the subject – usually and excellent bibliographical list of primary reference material, sources of the subject itself – mainly Greek, Syriac and Indian, and finally a list of the Arabic authors on the subject – some 100 astrologers and a similar number of writers on meteorological and related disciplines. Following the practice established in the earlier volumes, Sezgin adds his corrigenda in the form of "Nachträge" to the present volume as well as to the earlier ones. There is also a 'select' bibliography – not inclusive of all the works cited or mentioned in the body of the text, and extensive indices.

Although most of this working apparatus may look as if it is routine work, the reader should be advised that Sezgin's own interpretation of the status of the fields under discussion and their significance is to be found on almost every page, but especially in the sections titled "Anfänge, Entstehung und Entwicklung" (26f, 205f). Moreover, the reader is made aware of Sezgin's attempt to place these fields within their social context, as in the case of listing the attacks upon and defenses of astrology, (22f). In short, no student of Arabic astrology or meteorology, no matter what background or methodological persuasion he comes from, will, for a long time to come, be unable to do any serious work in either subject without a frequent reference to Sezgin's work.

The other comparable works that come readily to mind are those of Suter – for astrologers –, Brockelmann – for both subjects –, and Ullmann – for both subjects and others –, but none of these works come in any way close to the richness of Sezgin's, be it in its extensive survey of manuscripts or in its wide-ranging survey of holdings in libraries scattered in the most inaccessible parts of the world. Any one who has been engaged in any way with research in manuscripts held in India, North Africa, Turkey and Iran, will for ever

To Contributors of Articles for Publication in the *Journal for the History of Arabic Science*

1. Submit the manuscript in duplicate to the Institute for the History of Arabic Science. The text should be typewritten, double-spaced, allowing ample margins for possible corrections and instructions to the printer. In matters of paragraph-indentation and the indication of footnotes, please follow the style used in this journal.

2. Please include a summary – if possible in Arabic, but otherwise in the language of the paper – about a third of the original in length.

3. Bibliographical footnotes should be typed separately according to numbers inserted in the text. They should be double-spaced as well, and they should contain an unabbreviated complete citation. For books this includes author, full title (underlined), place, publisher, date, and page-numbers. For journals give author, number, year, and page-numbers.

Examples :

O. Neugebauer, *A History of Mathematical Astronomy* (New York: Springer, 1976), p. 123.

Sevim Tekeli, "Takiyüddin'in Sidret ül-Müntehâ'sına aletler bahsi", *Belleten* 25 (1961), 213-238.

After the first quotation, if the reference is repeated, then the author's name and the abbreviation *op. cit.* may be used. Alternatively, the books and articles cited may be collected into a bibliography at the end of the article, according to the above format, so that reference may be made to them in the footnotes by author or short title.

4. In the transliteration of words written in the Arabic alphabet the following system is recommended:

'	b	t	th	j	ḥ	kh	d	dh	r	z	s	sh
ء	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش

ṣ	ḍ	ṭ	ẓ	ʿ	gh	f	q	k	l	m	n	h	w	y
ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي

Hamza at the beginning of a word is omitted in transcription. The *lām* of the Arabic article before sun-letters is not assimilated (thus *al-shams* and not *ash-shams*).

For short vowels, *a* is used for *fatḥa*, *i* for *kasra*, and *u* for *ḍamma*. For long vowels diacritical marks are drawn over the letters: *ā*, *ī*, *ū*. The diphthong *aw* is used for 'وْ' and *ay* for 'يْ'. Long vowels before *hamzat al-wasl* are printed long (thus "abū'l-Qāsim" and not "abu'l-Qāsim").

tempted to disprove the existence of such lines because they believed the parallel postulate to be true. It is therefore interesting that **D** refers to a medieval geometer who doubted some of the consequences of the parallel postulate.

6.2 *Conjectural identification of* **D.**

Following Saidan, Bulgakov and Ahmedov[6] I shall attempt to identify **D.** Al-Bīrūnī says in the list of his own works mentioned above that he wrote a

> Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance, in ten leaves.[58]

The contents of **D** agree with this title, especially the reference to the two converging parallel lines. The infinite subdivisibility of magnitudes is also used in **D.**

It seems plausible that **D** is part of a work of Al-Bīrūnī, because **D** is found between other works of Al-Bīrūnī (**B, A** 40) and because **D** is well-written in a concise Arabic, which is different from the monotonous style of many other geometers.

So **D** is probably a fragment of the above-mentioned work on parallels of Al-Bīrūnī. This fragment seems to contain between one-half and one-fifth of the work.[59]

prima ipsa universae geometricae principia (Milano, 1733), book 1, propositions 30-33. Translated into German in: F. Engel, P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895), pp. 41-136 (esp. pp. 104-109). Translated into English in G.B.Halsted, *Girolamo Saccheri's Euclides vindicatus* (Chicago-London :Open Court Publications, 1920).

58. Sachau, *Chronologie* (see note 18), XXXXIV:4. Following the MS (Leiden, Or. 133, 45:12-13), Sachau reads *tajazzu' al-maqādīr lā ilā nihāya*. The correct reading is *tajazzu' al-maqādīr ilā lā nihāya*.

59. This is apparent from a comparison between the length of some other treatises of Al-Bīrūnī in MS Bankipore 2468 and their length according to his own indications in the list edited by Sachau (note 18). See the following table:

Treatise	*No. of leaves in Bankipore 2468*	*No. of leaves acc. to Al-Bīrūnī*	*see Sachau page*
A 33	50	200	XXXXI
A 34	5½	15	XXXXII
A 35	22	60	XXXXII
A 40	17½	80	XXXXIV
B	18 extant	70	XXXXI
D	1 extant	10	XXXXIV

6. D: *a fragment of Al-Bīrūnī's Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance.*

6.1 *Description of* D.

The beginning of **D** is a proof that any segment of a straight line is infinitely subdivisible; the proof uses the existence of parallels and the fact that one can find infinitely many points on a straight line on one side of a given point. This proof is attributed in **D** to Al-Kindī (died after 256H./870 A.D.).[53]

Next **D** discusses an "objection" by a person whose name is not mentioned. This objection probably refers to part of the text which is now lost. It is based on the opinion of this person that the existence of parallel (that is: non-intersecting and being in the same plane) straight lines which approach each other "on one side" would not be surprising.

The author of **D** states that in his opinion two non-parallel straight lines do meet.[54] But then he gives some examples of in which two non-parallel straight lines (i. e. line segments) approach each other without ever meeting. The idea is basically that one or both of the segments may be extended an indefinite number of times in such a way that the point of intersection is approached but not reached.

The historical interest of **D** is in the reference to the person who believed that there may in fact be parallel straight lines which approach each other in one direction. This assumption contradicts the parallel postulate of Euclid (if the other axioms of Euclid are assumed to hold). However, asymptotically approaching parallels exist in hyperbolic geometry, which was created by Bolyai, Lobachevski and Gauss early in the 19th century[55] The idea of two converging parallels is mentioned by earlier geometers, for example Proclus (5th century A.D.)[56] and Saccheri (1733).[57] However, these geometers at-

53. See *GAS* 5, 255-259 for the mathematical work of Al-Kindī.

54. The meaning of this statement is not clear, because by definition two non-parallel straight lines have a point of intersection. Perhaps the author meant that he believed the parallel postulate to be true; or he may have taken *mutawāzin* in the sense of "equidistant".

55. For a survey of the history of the parallel postulate and non-Euclidean geometry and references see M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times* (New York: Oxford University Press, 1972), Ch. 36 (pp. 861-88), R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry, a critical and historical study of its development* (translated from the Italian), (New York: Dover, Reprint 1955); see also notes 56 and 57. For attempts by medieval Islamic geometers to prove the parallel postulate see A. P. Juschkewitch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (translated from the Russian), (Leipzig, 1964), pp. 277-288.

56. See *Proclus, Commentary on the First Book of Euclid's Elements, Translated by Glenn R. Morrow* (Princeton, 1970), pp. 151, 285 (= Proclus, ed. Friedlein, Leipzig 1873, pp. 192, 364-5).

57. See G. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur*



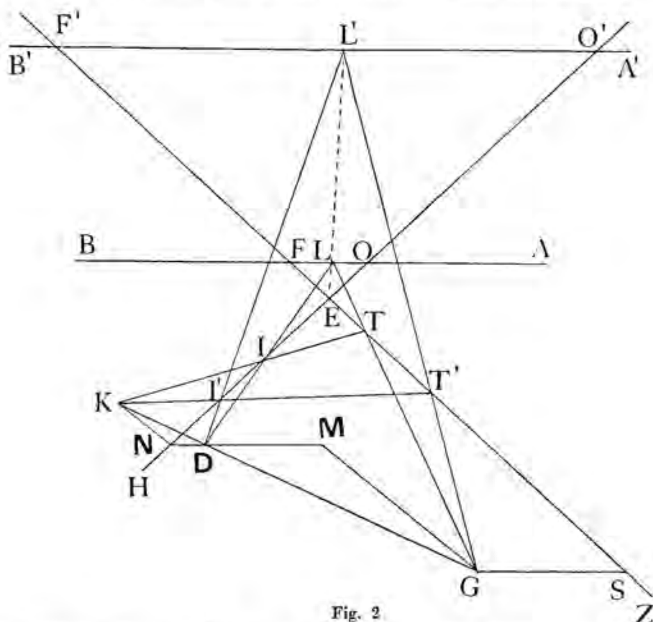


Fig. 2

eral reasons. First, the problems and their solutions are interesting medieval mathematics. Secondly, the work sheds some light on the geometrical activity in the early 4th century H./10th century A.D. This is of some importance because we have few traces of other work on advanced geometry in this formative period. Thirdly, the "Exquisite Problems" contain references to works of Apollonius which are not otherwise extant,[51] thus providing us with some new information about one of the greatest geometers of classical antiquity.

It seems that many of the "exquisite problems" were inspired by the work of Greek geometers. Among these is a famous problem of Apollonius: to construct a circle tangent to three given circles. At the end of the "Exquisite Problems" Ibrāhīm ibn Sinān gives solutions of his own and of his contemporaries Abū'l- ᶜAlā' ibn Abī'l-Ḥusayn (*GAS* 5, 300) and Abū Yaḥya (*GAS* 5, 303)[52]. Hitherto it was not known that the medieval Islamic geometers had also found solutions to this problem.

51. f 306b:20, 307a:22, 308a:1-4 = *RB* 1, 142:5, 144:5, 148:1-6 = *Dimirdâsh* 279:5, 281:2, 283: 16-21.

52. f 16b:20-20b = *RI* 6, 89:10 - 99:11. On the problem see T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, (Oxford At the Clarendon Press, 1921) vol. 2, pp. 182-185; H. S. M. Coxeter, "The Problem of Apollonius", *American Mathematical Monthly*, 75 (1968), 5-15.

We draw lines GS[40] and ND parallel to AB. Then they (8) are known[41] because they meet two assumed lines.

We join KN. We draw (9) GM[42] parallel to it and meeting DN in point M. Then point M[43] is known, since KN (10) is known in position.

Let SE and HE meet AB in F[44] and O. Then (11) the ratio of LT to TG becomes equal to the ratio of LF to GS,[45] and the ratio (12) of LI to DI becomes equal to the ratio of OL to DN.

But the ratio of DK to (13) KG is equal to the ratio of DN to NM.[46]. So the ratio of LF to GS[45] (14) is compounded of the ratio of OL to DN and the ratio of DN to NM.[47] (15) But that is the ratio of OL to MN.

So, *permutando*, the ratio of (16) LF[48] to OL becomes equal to the ratio of GS, which is known, to MN, which is known (17). And line OF[49] is known.

So point L is known.

The solution of this problem by Ibrāhīm ibn Sinān is in a mathematical sense related to the theorem of Desargues;[50] this can be shown in the following way (fig. 2). We repeat the same procedure, for the same points K, D, G and the same lines EZ, EH but for another line $A' B' \parallel AB$, using the notations I', T', L', F' and O' as in fig. 2.

We have $F' L' : L' O' = GS : NM = FL : LO$, so L', L and E are collinear. This result can also be derived by means of the theorem of Desargues: lines DG, $I'T'$ and IT, joining the vertices of triangles $DI'I$ and $GT'T$, pass through one point (K), so the points of intersection E, L' L of the corresponding sides ($I'I$ and $T'T$, DI' and GT', DI and GT) are collinear.

It should be emphasized, however, that there is no such idea as the theorem of Desargues in the reasoning of Ibrāhīm ibn Sinān. Ibrāhīm ibn Sinān probably viewed the problem simply as the construction of a plane transversal figure LG KG KIT LID such that K, D and G are three given collinear points and L, I and T are on three given lines.

The "Exquisite Problems" constitute a work which is interesting for sev-

40. GS in MS, HS in RI.

41. both in position (because $GS \parallel AB$, $ND \parallel AB$) and magnitude (because G and EZ are known and D and EH are known). The two assumed lines are EZ and EH.

42. GM in MS, HM in RI.

43. I have emended the MS to على نقطة م <فنقطة م> معلومة ; RI has only فنقطة م معلومة

44. The MS is illegible. RI has B.

45. LK to GS in MS, LK to HS in RI.

46. NM in MS, IM in RI.

47. NM in MS, LM in RI.

48. LK in MS and RI.

49. OF in MS, OB in RI.

50. See for example C. Boyer, *A History of Mathematics* (Ne Ywork: Wiley, 1968,), p. 395, and any introductory book on projective geometry.

From the book of Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbdaljalīl (al-Sijzī) on the exquisite problems which were currently being discussed between him and the geometers of Shirāz and Khorāsān, and his (own) additions.

1. Our synthesis of an important proposition from the book of Ibrāhīm ibn Sinân on the exquisite problems.

2. If lines AB, ZE and EH are assumed, and points G, D and K on one straight line are known, how do we draw two lines GTL and DIL, meeting <AB> in one point and meeting ZE and EH in points T and I such that the points T, I and K are on one straight line ? (fig. 1)

3. Let us draw GS and DN parallel to AB. We join NK.

4. We draw GM parallel to NK. We extend ND in a straight line to M such that it meets line MG <in M>.

5. We extend ZE and HE in a straight line towards F and O. We make the ratio of LF to OL equal to the ratio of GS to MN.

6. We draw GL and DL such as to meet lines ZF and HO in points T and I. We draw KT.

7. I say that line KT passes through point I.

8. Proof of that: the ratio of OL to MN is compounded of the ratio of OL to DN and the ratio of DN to NM.

9. But the ratio of LF to GS is equal to the ratio of LT to TG, because of the similarity of triangles LFT and GST.

10. And the ratio of LO to DN is equal to the ratio of LI to ID because of the similarity of triangles LOI and DNI.

11. And the ratio of DN to MN is equal to the ratio of KD to KG because of the similarity of triangles DNK and DMG.

12. So the ratio of LT to TG is compounded of the ratio of LI to ID and the ratio of KD to KG (by 5, 9, 10, 11).

13. So point I is common to lines LD, HO and KT, since figure LG KG KIT LID is a plane transversal figure.[36]

14. That is what we wanted to prove.

The analysis which corresponds to this synthesis is in C_1 f 4b:3-19 = *RI* 6, "*Al-handasa wa-ʿilm al-nujūm*", 17:19-18:17. I give an English translation below. The figure is the same as the figure belonging to the synthesis of Al-Sijzī. Numbers between parentheses refer to page and line numbers in *RI* 6. I shall use the conventions of section 4.2.

If lines AB, ZE and EH are assumed and two points (18:1) G and D are known, and point K is known, and points G, D and K (2) are on one straight line, how do we draw two lines GTL[37] and DIL (3), meeting AB in one point and meeting ZE[38] and EH in points (4) T and I such that points T, I and K are on one straight line?

Let us assume (5) that this is the case. Then the ratio of LT to TG is compounded of the ratio (6) of LI to DI and the ratio of DK to KG, as is proven in (7) the *Almagest*.[39]

36. If X is the point of intersection of LD and KT we have according to the theorem of Menelaos: $\frac{LT}{TG} = \frac{LX}{XD} \cdot \frac{KD}{KG}$. By line 12 $\frac{LT}{TG} = \frac{LI}{ID} \cdot \frac{KD}{KG}$, hence $X = I$. The theorem of Menelaos for plane transversal figures is proved in the *Almagest* of Ptolemy, I:13, ed. Heiberg, Leipzig 1898, vol.1 p. 69-70. German translation (of K.Manitius) in *Ptolemaüs, Handbuch der Astronomie* (Leipzig, 1963), vol. I, p. 46.

37. HTL in *RI*, GTL in MS.

38. ZE in MS, DE in *RI*.

39. *Almagest*, I:13; see note 36.

will be transcribed according to the conventions of Hermelink and Kennedy.[34] Sentences into which I have divided the text are indicated by numbers.[35]

34. H. Hermelink, E.S. Kennedy, "Transcription of Arabic Letters in Geometrical Figures", *Journal of the American Oriental Society*, 82 (1962), 204 = "Transkription mathematischer Bezeichnungen in arabischen Schriften", *Südhoffs Archiv*, 45 (1969), 85.

35. The Arabic text is from MSS *X* 52a:10-20 and *I* 61b:10-62a:3.

من كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل (السجزي) في المسائل المختارة التي جرت بينه وبين مهندسي شيراز وخراسان وتعليقاته

1 تركيبنا لشكل خطير من كتاب إبراهيم بن سنان في المسائل المختارة

2 إذا كانت خطوط اب زه هح موضوعة ونقط جـ د ك على
خط مستقيم معلومة كيف نخرج خطين كخطي جـ ط ل ه ى ل
يلتقيان < اب > على نقطة واحدة ويلقيان زه هح على نقطتي
ط ى حتى يكون نقط ط ى ك على خط مستقيم

3 فلنخرج جـ س [و] د ن يوازيان اب ونصل ن ك

4 ونخرج جـ م يوازي ن ك ونخرج ن د على استقامته
إلى م يلقى خط م جـ < على م >

5 ونخرج زه حه على استقامتهما إلى ف ع ونجعل نسبة
ل ف إلى ع ل كنسبة جـ س إلى م ن

6 ونخرج جـ ل د ل يقطعان خطي ز ف ح ع على نقطتي
ط ى ونصل ك ط

7 أقول أن خط ك ط يجوز على نقطة ى

8 برهان ذلك أن نسبة ع ل إلى م ن مؤلفة من نسبة ع ل إلى د ن
ومن نسبة د ن إلى م ن

9 فأما نسبة ل ف إلى جـ س فهي كنسبة
ل ط إلى ط جـ لاشتباه مثلثي ل ف ط جـ س ط

10 وأما نسبة ل ع إلى د ن فهي كنسبة ل ى إلى ى د لاشتباه
مثلثي ل ع ى د ى ن (I. f.62a)

11 وأما نسبة د ن إلى م ن فهي كنسبة ك د إلى ك جـ لاشتباه
مثلثي د ن ك د م جـ

12 فنسبة ل ط إلى ط جـ إذاً مؤلفة من نسبة ل ى إلى ى د
ومن نسبة ك د إلى ك جـ

13 فنقطة ى إذاً مشتركة لخطوط ل د ح ع ك ط لأن شكل
ل جـ ك جـ ك ى ط ل ى د قطاع مسطح
وذلك ما أردنا أن نبين

2 (2x) نقط : نقطة I/2 ويلقيان : فيلقيان X/3,4 ن ك : ن ل I/ ع ل *I* omits in 8 the second ع ل

That this is really so is proved by reference in a work of Al-Sijzī, namely the "Book by Aḥmad ibn Muḥammad ibn ᶜAbdaljalīl (al-Sijzī) on the exquisite problems which were currently being discussed between him and the geometers of Shirāz and Khorāsān, and his (own) additions" (*Kitāb Aḥmad ibn Muḥammad ibn ᶜAbdaljalīl fi'l-masā'il al-mukhtāra allatī jarat baynahu wa-bayna muhandisī Shirāz wa-Khorāsān wa-taᶜliqātuhu*, see *GAS* 5, 333 no. 23.). A version of this work survives in two manuscripts:

I = MS Istanbul, Reşit 1191, ff. 31b-62a, undated.

X = MS Dublin, Chester Beatty Library 3652, ff. 35a-52b, dated 612 H./1215 A.D.[33]

In I and X Al-Sijzī presents his synthesis of what he calls an important proposition from the book of Ibrāhīm ibn Sinān on the Exquisite Problems. The corresponding analysis is in $\mathbf{C}_1$ on f. 4b, which proves that $\mathbf{C}_1$ is in fact the *Exquisite Problems*.

Below I give English translations of the synthesis of Al-Sijzī and the analysis of Ibrāhīm ibn Sinān. My reason for doing this is first to present in detail the sources for identifying $\mathbf{C}_1$, and secondly to draw the attention of the reader to a hitherto neglected work which seems to be of some importance for the history of geometry.

In the translated passages Ibrāhīm ibn Sinān and Al-Sijzī deal with the following problem (fig.1):

Given: three straight lines AB, EZ, EH and three collinear points G, D, K. Required: two straight lines GL, DL intersecting in a point L such that the following relations are satisfied:

1. L is on AB.
2. GL intersects EZ in a point T, and DL intersects EH in a point I such that T, I and K are collinear.

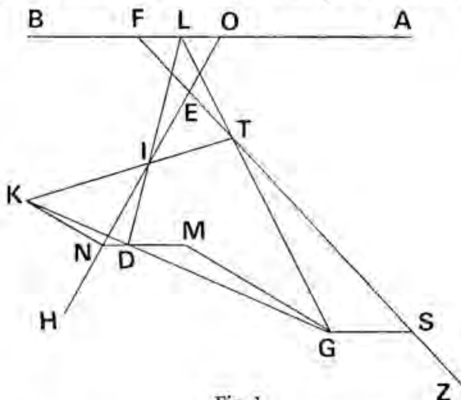


Fig. 1

I have added some words to the texts in the manuscripts; these words will be translated in pointed brackets. Arabic letters in geometrical figures

33. See A.J.Arberry, *A Handlist of the Arabic Manuscripts in the Chester Beatty Library*, vol. 3 (Dublin, 1958), p. 59 no. 7.

This is a proof of a method for calculating the equation of the sun, which is the same as the proof in the second section of the third *maqāla* in **B**. This section is entitled:

> On the proof of a calculation which came to my mind by means of the properties of the broken line in the circle[27]

From the material presented above we can draw the conclusion that **B** contains a version of Al-Bīrūnī's *Treatise on the solution and the division of the equation.* This treatise must have been written in or before 418 H./ 1027 A. D. because it is mentioned in the version of the *Extraction of Chords* which Al-Bīrūnī finished in Rajab 418 H./July-Aug. 1027 A.D.[28]

5. *Identification of* $\mathbf{C}_1$ *as the* Exquisite Problems *of Ibrāhīm ibn Sinān.*

Ibrāhīm ibn Sinān says in his *Letter on the Description of the Notions he Derived in Geometry and Astronomy* (**A** 24) that he wrote a treatise called the *Exquisite Problems*[29] (*Al-masā'il al-mukhtāra*). This treatise contained solutions of

> 41 geometrical problems, namely difficult problems on circles, lines, triangles, tangent circles and other things[30]

Ibrāhīm ibn Sinān says that he

> followed the method of analysis only, without giving syntheses, except in the case of three problems, where syntheses were necessary.[30]

$\mathbf{C}_1$ is a geometrical text from which only part of the preface is missing. In $\mathbf{C}_1$ about 40 geometrical problems are treated. The exact number is to some extent arbitrary, depending on whether certain auxiliary problems are counted separately. The author of $\mathbf{C}_1$ must be Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit, because it contains a reference to "my grandfather Abū'l-Ḥasan Thābit".[31]

In $\mathbf{C}_1$ an analysis is given of all problems, but only three syntheses occur.[32] So it is likely that $\mathbf{C}_1$ is part of the *Exquisite Problems.*

27. *RB* 1, 136:4-5 = f. 305b:7-8. The proof is in 305b:7-22, continued on f 309a:1-7 = *RB* 1, 136:3-138:1, continued on *RB* 1, 153:19-154:10, edited in *Dimirdāsh* 213-216. The corresponding method of calculation is explained in the second section of the second maqāla, which is in *RB* 1, 117: 13-118:10, edited in *Dimirdāsh* 184-185. It is discussed by Kennedy and Muruwwa *op. cit.* p. 115-116 as method 2. Note that *RB* 1, 117:13-118:10 is part of $\mathbf{C}_1$, and that the remark of Kennedy and Muruwwa, p. 116 left column, "In this connection Bīrūnī gives the proof... Apollonius is mentioned several times in the passage" refers in fact to $\mathbf{C}_1$, not to **B**.

28. The date is in MS Bankipore 2468, f. 326a, printed in *RB* 1, 226:11-12; = *Dimirdāsh* 287: 6-7.

29. f. 132a:23-24 = *RI* 3, 69:5 = edition by Saliba (see **A** 24), 200:230 .

30. f. 132a:12-15 = *RI* 3, 68:8-11 = ed. Saliba 200:20-22.

31. f. 308b:20 = *RB* 1, 153:1 = *Dimirdāsh* 286:19. This was already pointed out by Anbouba in "*Tasbī*ᶜ *al-Dā'ira*", *JHAS*, 1 (1977), 382 note 6.

32. The syntheses are on ff. 308a:28-308b:30 = RB 1, 150:4-152:12 = *Dimirdash* 285:7-286: 18;f 3a:7-29 = *RI* 6, 11:1-12:8; f 10a:10-10b:18 = *RI* 6, 46:12-50:16.

This description agrees with the extant part of the preface in **B.** In order that the reader can check this statement himself, I give a tentative translation of f. 325a:1-15 = *RB* 1, 219:16 - 220:13 below. Dots indicate places where one or two words in the manuscript are illegible. All additions of mine are in parentheses. I have indicated in footnotes all places where I read the manuscript differently from the editors of *RB*.

> ...[19] containing the values of the equation of the sun from the *zij* of Ḥabash. He found in ... a place where there was a big difference between the two lines in smallness (?) in the two margins... to it, and at this (point) the matter of those numbers became irregular. Therefore he asked me about this situation... as somebody trained in working with geometrical lines and accustomed to work on geometrical proofs ... at (that) time, with a[19] number[20] of methods for calculation, to which thinking on them (the geometrical lines and proofs) had led me, some of them being easy, others being difficult. Thereupon none of them produced to the person who had asked[21] (the question) anything which agreed[22] with what he had asked about.
>
> I was inclined to attribute this to the negligence of Ḥabash in calculating those tables, or to inattentiveness on the part of transcribers, till I returned to the collections of zijes[23] mentioned above. Then I found in them a method of Ḥabash for solving the equation, dividing it, explaining it and making it clear. When I tried it, it produced for that place (in the table) a value equal to the value in the table. Thus I learnt that Ḥabash had used it, but nobody else.
>
> Then I thought over its proof, and I enjoyed myself by thinking over the proofs of other (methods), till the ways to the knowledge of all of them had opened up, and the ways to the proof of them had been illuminated by tireless attention[24] to what made the perception of them obscure. Because of the multitude of them it was possible to devote a book to them, containing a very useful[25] specialism in astronomy, and for training those who dislike the dreariness of uncritical copying, not the remaining (uncritical) followers. I have made it, and it is this book.

The following reference is also of interest for the idenfication of **B.** In the *Extraction of Chords* Al-Bīrūnī presents what he calls a

> Solution of the equation<and division of it> for half of the deferent, from my book concerning this subject.

(*RB* 1, 72:1 — 74:14, the words in angle brackets are not in the Bankipore manuscript, but they are in the Leiden manuscript translated by Suter[26]).

19. f 325a:1-4 have been printed incorrectly in *RB* 1, 219:16-220:1. I read the manuscript as follows:

المحتوى تعاديل الشمس من زيج حبش فوجد في .. موضعا عظم فيه تفاضل ما بين السطرين في صغرة (؟) في حاشيتيه .. إليه وزال به أمر تلك الأعداد عن النظام فسألني عن كيفية الحال .. كن متدربا بممارسة الخطوط المساحية ومعاناة البراهين الهندسية .. في الوقت بما حضرني

20. The MS is not very legible. I conjecturally read عدة

21. السائل as in 325a:6, not للسائل as in *RB* 1,220:2.

22. *RB* 1 omits موافقا which is in 325a:6 after شيئا .

23. الملتقطات الزيجية as in 325a:8.

24. بالدؤوب as in 325a:12.

25. عظيم الغناء as in 325a:13.

26. *Op. cit.* (see section 3, A 40) p.45-46 no. 11.

4.1 *The contents of* **B.**

The subject of **B** is the calculation of the equation of the sun. For a discussion of the problem and terminology I refer to the article by Kennedy and Muruwwa mentioned in section 3 under **B.**

B is part of a text which once consisted of four *maqālāt* (plural of *maqāla* = big chapter). The extant part of the first *maqāla* contains a fragment of a preface, which will be translated below, and a full discussion of terminology and preliminary theorems.

The second and third *maqāla* are extant in **B.** They present 16 methods for calculating the equation of the sun and give geometrical proofs for the correct methods. The 16 methods are discussed in full in the article by Kennedy and Muruwwa mentioned above. These authors say that the text they discuss is part of the *Rasā'il al-Bīrūnī* (letters of Al-Bīrūnī), but they do not give a further identification.

Only part of the fourth *maqāla* is extant in **B.** Kennedy and Muruwwa do not discuss this *maqāla*, but I use their notation for the second and third. It deals with the following problem. Given two of the following four parameters: the mean anomaly $\bar{\lambda}$, the true anomaly λ, the equation e and its maximal value e_{max}, required to determine the other two parameters. This leads to six combinations (qirānāt), which are listed in the extant part of the fourth *maqāla*: to solve the problem if 1. $\bar{\lambda}$, e_{max}, or 2. $\bar{\lambda}$, e, or 3. $\bar{\lambda}$, λ, or 4. e_{max}, e, or 5. e_{max}, λ, or 6. e, λ, are given. Then the text runs:
"It is necessary that we finish the book by mentioning
them (the 6 combinations) in detail" (*RB* 1, 179:13). Hence the fourth *maqāla* was the last one. The text is broken off in the middle of the second combination.

In conclusion: **B** is almost the complete text of a treatise on the solar equation.

Dimirdāsh edited a small part of the first *maqāla* and the complete second and third *maqālas* as part of Al-Bīrūnī's *Extraction of Chords*. He erroneously rendered the beginning of $\mathbf{C}_I$ (the *Exquisite Problems* of Ibrāhīm ibn Sinān) as "fourth *maqāla*". $\mathbf{C}_I$ begins on p. 246 of his edition.

4.2 *Identification of* **B.**

In the list of the works he completed before the end of 427 H. Al-Bīrūnī says that he had composed:

> because of a question of somebody who suspected (something) in the tables of the equation of the sun and who did not discover the method of Ḥabash for solving it, a treatise on the solution and division of the equation, in 70 leaves.[18]

18. The list has been edited in: *Chronologie on: Orientalischer Völker von Alberūnī. Herausgegeben von Dr. C. Edward Sachau* (Leipzig 1878), pp. XXXVIII-XXXXVIII. The quoted passage is on p. XXXXI lines 1-2. On Ḥabash see *GAS* 6, 173-175.

f. 324 = 214:10 *wa-annahā* (MS: *wa lā annahā*) - 219:16 *ma*ᶜ*lumā* + fig. 117.
f. 321 = 201:9 *kadhālika* — 206 : 11 *ma*ᶜ*lūm* + figs. 109, 111.
f. 318 = 184:12 *fa-TC* — 190:5 *murabba*ᶜ*uhu* + fig. 102.
f. 320 = 196:1 *ma*ᶜ*lūman* — 201:9 *faḍl* + figs. 107, 108.
f. 319 = 190:5 *fa-murabba*ᶜ *BZ* — 196:1 *ilā DG* + figs. 103, 104.
(figs. 103, 104 are the same as figs. 105, 106 respectively)
f. 306a:1-4 = 108:9 *ma*ᶜ*lūma* — 108:14 *ilā HZ*.
f. 306a:4 — 308 = 138:1 *ilā khaṭṭ ma*ᶜ*lūm* — 153:19 *nuqṭa* + figs. 74-79.

ff. 2-20b has been printed in *RI* 6, :"*Al-Handasa wa* ᶜ*Ilm al-Nujūm*" (5:7 *idh* - end). Ff. 324, 321, 318, 320, 319, 306-308b:24 have been edited in the correct order in *Dimirdāsh* 246:9-286:23 as part of the *Extraction of Chords* of Al-Bīrūnī.

C₂ *Cat* 3 (p 62) f 21a-39b. *Maqāla li-Ibrāhīm ibn Sinān fī ṭarīq al-taḥlīl wa'l-tarkīb wa-sā'ir al-a*ᶜ*māl fi'l-masā'il al-handasiyya.* Treatise by Ibrāhīm ibn Sinān on the method of analysis and synthesis and the other procedures in geometrical problems. *GAS* 5, 294, no.2. Printed: *RI* 2. The last leaf of the treatise is missing. The complete text, which is in MS Paris, Bibliothèque Nationale, Fonds Arabe 2457, 1b-18b and MS Caīro, Dār al-Kutub Muṣṭafā Fāḍil Riyāḍa 40m, 130b-153b, is about 15 lines longer than the text in MS Bankipore 2468.

D

F. 317 is a fragment of Al-Bīrūnī's *Maqāla fī anna lawāzim tajazzu' al-maqādīr ilā lā nihāya qarība min al-khaṭṭayn alladhayn yaqrubān wa-lā yaltaqiyān fi'l-istib*ᶜ*ād.* Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance, see section 6 of this paper. The treatise is listed in *GAS* 5, 383 no. 13 as a lost work. Printed in *RB* 1, "Istikhrāj al-Awtār" (180:15 *faraḍa* - 184:12 *B* + figs. 100-101). Russian translation with commentary in P. G. Bulgakov, A. A. Ahmedov, "Beruni i al-Kindi o teorii parallel'nih", *Obščestvcennie nauki b Uzbekistane* (1977), 30-36. Review by E. S. Kennedy in *Mathematical Reviews*, March 1981, no. 81c: 01008. F. 317 was not edited by Dimirdash.

4. **B:** *The Treatise on the solution and the Division*[17] *of the Equation by Al-Bīrūnī.*

17. The word division probably refers to the different ways in which the equation has to be calculated according to the different positions of the sun.

B

B is not mentioned in the catalogue. It consists of ff. 325, 322, 299-305, 309-316. B is a fragment of Al-Bīrūnī's *Maqāla fī'l-taḥlīl wa'l-taqṭī*ᶜ *li'l-ta*ᶜ*dīl*: Treatise on the solution and the division of the (solar) equation, see section 4 of this paper. The treatise is listed in *GAS* 6, 273 no. 11 as a lost work. Printed in *RB* 1, "Istikhrāj al-Awtār":

f 325 = 219:16 *al-muḥtawā* – 224:1 ᶜ*anhu*;
f 322 = 206:12 *fa-ammā* – 209:10 min + figs. 110–114;
f 299 — 305 = 108:15 *al-mutasāwiyatayn* – 138:1 *ṣāra*;
f 309 — 316 = 153:9 *lanā* – 180:15 *ilā* + figs. 85–99.

The Arabic text in ff. 299-305 and ff. 309-316 has been edited in *Dimirdāsh* 172:2 – 245, as part of the *Extraction of Chords* of Al-Bīrūnī. Dimirdāsh realized that the text on f. 305b continues on f. 309a.

F. 316b:1-23 (= *RB* 1, 179:1-180:15) and ff. 322, 325 was not edited by Dimirdāsh.

Part of the treatise is discussed in E. S. Kennedy, Ahmad Muruwwa, "Biruni on the solar equation," *Journal of Near Eastern Studies*, 17 (1958), 112-121.

C

C consists of two parts C_1 and C_2.

C_1: f 324, 321, 318, 320 ,319, 306-308, 2-20b is part of Ibrāhīm ibn Sinān's *Al-Masā'il al-Mukhtāra*, the exquisite problems. See section 5 of this paper. The work is mentioned in *GAS* 5, 294[15] under no. 6. The first 8 extant leaves have been printed in *RB* 1, "*Istikhraj al-Awtār*":[16]

15. Sezgin mentions references made by Ibrāhim ibn Sinān to Abū'l-ᶜAlā' ibn Karnīb (*GAS* 5, 300), Abū'l-ᶜAbbās ibn Yaḥyā (*GAS* 5, 300-301), Abū Yaḥyā (*GAS* 5, 303) and ᶜAlī ibn al-Ḥasan ibn Maᶜdan (*GAS* 5, 304). These references are not in the "Letter ... on the description of the notions he derived in geometry and astronomy" (A 24), but in the "Exquisite Problems" (C_2).

Sezgin says (*GAS* 5, 381 under no. 6) that a fragment of a book by Al-Bīrūnī on tangent circles has been preserved in the printed text of Al-Bīrūnī's *Extraction of Chords*, *RB* 1:218-129. However, this part of the printed text is part of the "Exquisite Problems" of Ibrāhīm ibn Sinān, who refers to his own book on tangent circles (which is mentioned in *GAS* 5, 294 no. 6) .So *GAS* 5, 381 no. 6 has to be omitted.

Anbouba also remarked that Al-Bīrūnī probably did not write a book on tangent circles, and that Ibrāhīm ibn Sinān is the author of part of the text edited by Dimirdāsh as Al-Bīrūnī's *Extraction of Chords*. See A. Anbouba, *Tasbī*ᶜ *al-dā'ira* (in Arabic), *JHAS*, 1 (1977), 352-384, esp. 382 note 6.

16. At this point Saidan's references are not altogether correct (op. cit, see note 5).

book on Making Easy the Roads to the Geometrical Propositions (*kitābunā fī tashīl subul ilā 'l-ashkāl al-handasiyya*, f.280a:24 = *RM* 8, 3:5) and "our book on the Properties of the Egg-shaped and Lentil-shaped Figures" (*kitābunā fī khawāṣṣ al-shakl al-bayḍī wa'l-ʿadasī*, f 280b:18 = *RM* 8, 5:5) Al-Sijzī is known to have written a work on "making easy the roads for deriving geometrical figures " (*GAS* 7, 410 no. 38). Al-Sijzī refers to a work of his on the egg-shaped and lentil-shaped figure (the solids of revolution of an ellipse around its major and minor axis respectively) in his *Introduction to the Science of Geometry* (*al-Madkhal ilā ʿilm al-handasa*, *GAS* 5, 333 no. 20, MS. Dublin, Chester Beatty 3652, 16a:17). As far as is known, no other Arabic geometer has written about these figures. We know that Al-Sijzī also wrote on the "fact" that all figures are derived from the circle (*GAS* 7, 410, f) Thus Al-Sijzī is probably the author of the treatise **A** 39.

A 40 *Cat* 42 (p 92) f 282b-298,326a, rest 243a-260a. *Kitāb Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī 'stikhrāj al-awtār fī'l-dā'ira bi-khawāṣṣ al-khaṭṭ al-munḥanā al-wāqiʿ fīhā*. Book of ... Al-Bīrūnī on the extraction of chords in the circle by means of the properties of the inscribed broken line. *GAS* 5, 381 no. 3. Printed in *RB* 1, "*Istikhrāj al-Awtār*": f 282b-298 = beginning - 108:8 *al-musāwiya li-zāwiya* + figs. 1-72; f 326a = 224:2 ... *O* — end + fig. 118, right side.

Edition of the Arabic text in ff. 282b-298 in *Dimirdāsh* 32 - 172:2; f. 326a: 21-29 is edited in *Dimirdāsh* 286:24-287:7. The text in f. 326a:1-20 has not been edited by Dimirdāsh (it is, however, on the facsimile of f. 326a on p. 31 of his edition). German translation with commentary, both based on a Leiden ms. in H. Suter, "Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abū'l-Rayḥān Muḥammad al-Bīrūnī," *Bibliotheca Mathematica*, 3. *Folge*, 11 (1910), 11-78. A facsimile edition of this Leiden MS (?) was published by Muḥammad Āthār Millī (?) (Teheran (?) 2535 Cyrus (?)), Silsilat Intishārāṭ 124. The Leiden and Bankipore manuscrpits of the *Extraction of Chords* are slightly different. Russian translation by S. A. Krasnova, and L. A. Karpova with commentary by B. A. Rosenfel'd and S. A. Krasnova in: *Iz istorikii nauki i tehniki b stranah Vostoka*, vol. 3 (Moscow, 1963). See also Muḥammad Saud, "A part of al-Bīrūnī's Istikhrāj al-Awtār fī 'l-Dā'irah" in Hakim Muhammed Said (ed.), *Al-Bīrūnī Commemoration Volume* (Karachi: Hamdard Academy, 1973), pp. 691-705. See also A. S. Saidan, "The Trigonometry of Al-Bīrūnī" in the same volume, pp. 681-690.

On f. 326b there is a geometrical figure which apparently does not belong to any of the treatises and fragments in MS Bankipore 2468. The figure has been printed in *RB* 1, "*Istikhrāj al-Awtār*", fig. 118, left side.

mad ibn Aḥmad al-Bīrūnī raḥimahu'llāh fī rāshikāt al-Hind. Treatise by ... Al-Bīrūnī, may God have mercy upon him, on the Indian rule of three. *GAS* 5, 380 no. 2. Printed: *RB* 4. Russian translation by B. A. Rosenfel'd in *Iz istorikii nauki i tehniki v stranah Vostoka* vol. 3, Moscow 1963. See also Abū'l-Qāsim Qurbānī, *Bīrūnī-nāma* (in Persian), (Teheran, A.H. solar 1353), pp. 206-219. On the word rāshikāt see E. Boilot, "l'Oeuvre d'al-Beruni, Essai Bibliographique," *Mélanges. Institut Dominicain d'Etudes Orientales du Caire*, 2 (1955), 161- 256, esp. 188.

A 35 *Cat* 38 (p 89) f 245a-266b rest 206a-227b. *Tamhīd al-mustaqarr li-taḥqīq maᶜnā'l-mamarr li-Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī.* Smoothing the basis for an investigation of the meaning of transits by ..... Al-Bīrūnī (this is the translation of Professor Kennedy). *GAS* 6, 267, no.3. Printed: *RB* 3. English translation and commentary in: *Al-Biruni on transits .A study of an Arabic treatise entitled Tamhīd al-Mustaqarr li-taḥqīq maᶜnā'l-mamarr by Al-Bīrūnī Translated by Muḥ. Saffouri and Adnan Ifram. With a commentary by E. S. Kennedy.* American University of Beirut, 1959. See also G. J. Toomer, "Notes on Al-Bīrūnī on transits," *Orientalia.* 34 (1965), 45-72.

A 36 *Cat* 39 (p 90) f 267a-276b rest 228a-237b. *Kitāb fī kayfīyyat tasṭīḥ al-kurra ᶜalā saṭḥ al-asṭurlāb .... istikhrāj Aḥmad ibn Muḥammad ibn al-Ḥusayn al-Ṣaghānī.* Book on how to project the (celestial) sphere on the plane of the astrolabe... by ... Al-Ṣaghānī. *GAS* 5, 311, no.4. Printed: *RM* 7.

A 37 *Cat* 40 (p 90) f 276b-279b rest 237b-240b. *Risālat Aḥmad ibn Muḥammad ibn ᶜAbdaljalīl al-Sijzī fī'l-shakl al-qaṭṭāᶜ.* Letter by ... Al-Sijzī on the transversal figure. *GAS* 5, 332 no. 15. Printed: *RM* 10, pp. 1-22. See J. L. Berggren, "Al-Sijzī on the Transversal Figure", *JHAS*, 5 (1981), 23-36.

A 38, not mentioned in the catalogue, f 279b-280a rest 240b-241a. *Al-shakl al-mutassaᶜ.* The nine-sided figure (i.e. the regular nonagon). Anonymous, not mentioned in *GAS*. Printed: *RM* 10, p. 22-24. English translation and commentary by J. L. Berggren, "An Anonymous Treatise on the Regular Nonagon", *JHAS*, 5 (1981), 37-41.

A 39 *Cat* 41 (p 91) f 280a-282a rest 241a-243a. *Risāla li-Naṣr ibn ᶜAbdallāh fī anna 'l-ashkāl kullahā min al-dā'ira.* Letter by Naṣr ibn ᶜAbdallāh on (the fact) that all figures are derived from the circle. *GAS* 5, 314 no. 1. Printed: *RM* 8.

The author of this treatise was probably not Naṣr ibn ᶜAbdallāh but Al-Sijzī, for the following reasons. The author of the treatise mentions "our

by F. A. Shamsi in: Hakim Muhammed Said (ed.), *Ibn al-Haytham, Proceedings of the Celebrations of 1000th Anniversary* (Karachi: Hamdard Academy 1969), pp. 228-246.

A 32 *Cat* 34 (p 84) f 191a-193b rest 148a-150b. *Risāla fī misāḥat al-mujassam al-mukāfī li'l-shaykh Abī Sahl Wayjan ibn Rustam al-Qūhī.* Letter on the volume of the parabolic solid by the master ... Al-Qūhī. *GAS* 5, 318, no.5. Printed: *RM* 6. German translation in: H. Suter, "Die Abhandlungen Thābit b. Kurras und Abū Sahl al-Kūhīs über die Ausmessung der paraboloïde." *Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen*, 48-49 (1916-7), 186-227. The preface in the MS on f 191a corresponds to the translation on p. 213-215.

A small collection of propositions without marginal number is appended to the preceding treatise. : **A** - *Cat* 35 (p 85) f 193b rest 150b. *Min kalām Abī Sahl al-Qūhī ayḍan fīmā zāda min al-ashkāl fī amr al-maqāla al-thāniya min kitāb al-Uṣūl li-Uqlīdis lammā yuḥtāju ilayhi fi'l-maqāla al-thāniya wa'l-thālitha min kitāb al-Makhrūṭāt.* From what the same ... Al-Qūhī said on the propositions he added to the second book of the *Elements* of Euclid because they are necessary in the second and third book of the *Conics* (of Apollonius) *GAS* 5, 319 no, 15. Not printed.

A 33 *Cat* 36 (p 85) f 194a-195, 125-131, 196-217, 220-239b, rest 151a-200b. *Ifrād al-maqāl fī amr al-ẓilāl taṣnīf al-shaykh Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī.* The exhaustive treatise on shadows, composed by the master ... Al-Bīrūnī. *GAS* 5, 380 no. 1. Printed: ff. 194a-195 = *RB* 2, "*Ifrād al-Maqāl*" (beginning - 5:10 *aḥaduhā*); ff. 125-131 = *RI* 3, "Kitāb fi Ḥarakāt al-Shams" (34:8 *min al-ākhar* - 63-4 *tūṣifa*); ff. 196-217, 220-239b = *RB* 2, "Ifrād al-Maqāl" (5:10 bi-annahā - end). English translation with commentary in: E. S. Kennedy, *The Exhaustive Treatise on Shadows by Abu al-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī* (Aleppo: IHAS, 1976), 2 vols. See also H. Hermelink, "Bestimmung der Himmelsrichtungen aus einer einzigen Schattenbeobachtung nach Al-Bīrūnī. "*Südhoffs Archiv*, 44 (1960), 329-332; E. S. Kennedy, "Bīrūnī's graphical determination of the local meridian," *Scripta Mathematica*, 24 (1959), 251-255; E. S. Kennedy, Al-Bīrūnī on the Muslim Times of Prayer, in: P. J. Chelkowski (ed.) *The Scholar and the Saint, Studies in Commemoration of Abū'l-Rayḥān al-Bīrūnī and Jalāl al-Dīn al-Rūmī* (New York: New York University Press, 1975), p. 83-94; B. A. Rosenfel'd, L. G. Utseha, "Some mathematical discoveries in al-Bīrūnī's Shadows", *JHAS*, 4 (1980), 332-336.

A 34 *Cat* 37 (p 88) f 239b-244b rest 200b-205b. *Maqālat Abī'l-Rayḥān Muḥam-*

Handasa. Book of Archimedes on the Elements of Geometry. *GAS* V, 135,7. Printed: *RT* 1. This treatise is a version of the "Book of Assumptions by Aqāṭun". A facsimile-edition (of an Aya Sofya manuscript) with English translation and commentary (also on the present manuscript) is in Y. Samplonius, *Book of Assumptions of Aqāṭun*, thesis, Amsterdam 1977. See also Y. Dold-Samplonius, "Some remarks on the 'Book of Assumptions by Aqāṭun' ", *JHAS*, 2 (1978), 255-263.

A 28 *Cat* 30 (p 80) f 144b-145b rest 101b-102b. *Faṣl fī takhṭīṭ al-sāᶜāt al-zamāniyya fī kull qubba wa fī qubba yustaᶜmalu lahā li'l-Faḍl ibn Ḥātim al-Nayrīzī.* Chapter on drawing the lines demarcating the unequal hours in every cupola or in a cupola which is used for them, by ... Al-Nayrīzī (on sundials). *GAS* 6 192 no. 3. Printed: *RM* 2.

A 29 *Cat* 31 (p. 80) f 145b-169a, rest 102b-162a. Risālat Abī ᶜAbdallāh al-*Ḥasan ibn Muḥammad ibn Ḥamla al-maᶜrūf bi'bn al-Baghdādī fi'l-maqādīr al-mushtarika wa'l-mutabāyina.* Treatise by Abū ᶜAbdallāh ... known as ibn al-Baghdādī, on commensurable and incommensurable magnitudes. *GAS* 5, 392. Printed: *RM* 9. Russian translation in: G. P. Matvievskaja, "Materialy k istorii učenija o čisle na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke", in: *Iz istorii točnyh nauk na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke* (Tashkent, 1972).

A 30 *Cat* 32 (p. 81-83) f 169a-188b rest 126a-145b. *Kitāb inbāṭ al-miyāh al-khafiyya taṣnīf Abī Bakr Muḥammad ibn al-Ḥasan al-Ḥāsib al-Karajī.* Book on finding hidden waters, composed by ... al-Karajī. GAS 5, 328,9. Printed: *Inb.* French translation by A. Mazahéri in: Al-Karagī, *La civilisation des eaux cachées* (Nice, 1973). The Persian translation of this work has been edited by Ḥusayn Khadīvjam: *Istikrāj-i ābhā- yi pinhānī* (Teheran, Iranian Culture Foundation, 1966), 127 pp. See "Muḥammad ibn al-Ḥusayn Karajī, Kitāb-i istikhrāj-i abhā-yi pinhānī tarjuma-yi Ḥusayn Khadīvjam" (in Persian,) *Sokhan-i ᶜIlmī*, 4 (1344 (A.H. Solar)), 408-411. See also Mehdi Nadji, "Karadjis Erschliessung verborgener Gewässer", *Technikgeschichte*, 39 (1972), 11-24, and F. Bruin, *Surveying and surveying instruments. being chapter* 26, 27, 28, 29 *and* 30 *of the book On Finding Hidden Waters by Abu Bakr Muhammad al-Karaji*, *Biruni newsletter* no. 31. (American University of Beirut 1970).

A 31 *Cat* 33 (p 84) f 189a-191a rest 146a-148a. *Qawl Ibn al-Haytham fī khawāṣṣ al-muthallath min jihat al-ᶜamūd.* Treatise by Ibn al-Haytham on the properties of the triangle with respect to the perpendicular. *GAS* 5, 366 no.4. Printed: *RH*, appendix, See H. Hermelink, "Zur Geschichte des Satzes von der Lotsumme im Dreieck", *Südhoffs Archiv*, 48 (1964), 240-247. English translation

Printed: ff. 118a–124b = *RI* 3, "*Kitāb fī Ḥarakāt al-Shams*" (beginning-34:8 qaws *AE*), f. 323 = *RB* 1, "*Istikhrāj al-Awtār*" (209:10 *mithl* - 214:10 *al-murabba*ᶜ + figs. 115, 116). F. la, has not been printed. This is the reason why Saidan stated that the treatise is incomplete.[13]

A 24 *Cat* 2 (p 61) f 1b, 131a-132b rest 87a-89b. *Risālat Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit fī wasf al-ma*ᶜ*ānī allatī 'stakhrajahā fī'l-handasa wa* ᶜ*ilm al-nujūm.* Letter by Ibrāhīm ibn Sinān on the description of the notions he derived (i.e the works he composed) in geometry and astronomy.[14] *GAS* 5, 294 no. 4. Printed: f. 1b = *RI* 6, "*Al-Handasa wa-*ᶜ*Ilm al-Nujūm*" (beginning – 5:7 *al-khaṭṭ al-wāqi*ᶜ); ff. 131a–132 = *RI* 3, "*Kitāb fī Ḥarakāt al-Shams,*" 63:4 *li-kull* - end. Edition of the Arabic text in G. Saliba, "*Risālat Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fī'l-ma*ᶜ*ānī allatī 'stakhrajahā fī'l-handasa wa'l-nujūm*" (in Arabic), *Studia Arabica et Islamica, Festschrift for Iḥsān* ᶜ*Abbās*, ed. Wadād al-Qāḍī (American University of Beirut, 1981), pp. 195-203.

A 25 *Cat* 27 (p 78) f 132b-134b rest 89b-91b. *Kitāb Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit fī misāḥat qaṭ*ᶜ *al-makhrūṭ al-mukāfī.* Book by Ibrāhīm ibn Sinān ... on the area of the parabola. *GAS* 5, 293, no. 1. Printed: *RI* 5. German translation in H. Suter, "Die Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit", *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 63 (1918), 214-228. See also B. A. Rosenfel'd, M. M. Rožanskaja, "Geometričeskie predstazovanija i peremennye veličiny u Ibrahima ibn Sinana" (in Russian), *Istorija i metodologija estestvennyh nauk*, 9 (1970).

A 26 *Cat* 28 (p 78) f 134b-141a rest 91b-98a. *Kitāb Arshimīdis fī'l-dawā'ir al-mutamāssa.* Book of Archimedes on tangent circles. *GAS* 5, 134 no.6. Printed: *RT* 2. Edition of the Arabic text and German translation in: *Archimedes Opera Mathematica vol. IV, Über einander berührende Kreise. Aus dem Arabischen von Yvonne Dold-Samplonius, Heinrich Hermelink, Matthias Schramm.* (Stuttgart: Teubner, 1972). Russian translation by B. Rosenfel'd in I.N. Veselovski (ed.), *Archimed, Sočinenija* (Moscow, 1962). Spanish translation in J. Vernet, A. Catalá, "Arquímedes árabe: El tratado de los circulos tangentes, "*Andalus*, 33 (1968), 53-93. See also Y. Dold-Samplonius, "Archimedes: Einander berührende Kreise", *Südhoffs Archiv*, 57 (1973), 15-40.

A 27 *Cat* 29 (p 79) f 141a-144b rest 98a-101b. *Kitāb Arshimīdis fī Uṣūl al-*

13. *Op. cit.* (see note 5), p. 174.

14. In *GAS* 6, 194 under no. 3 it has been stated, though wrongly, that this work deals with the geometry necessary for astronomical calculations. In *GAS* 5, 294 note 1 Sezgin mentions "autobio- und bibliographische Angaben aus einer nicht identifizierbaren Schrift Sinān's"; these references are found in this work of Ibrāhīm ibn Sinān on ff. 131a-132b.

A 17 *Cat* 20 (p 73) f 106b-109b rest 67b-70b. *Maqālat Abī Naṣr Manṣūr ibn* ᶜ*Alī ibn* ᶜ*Irāq fī kashf* ᶜ*awārī al-Bāṭiniyya bimā mawwahū* ᶜ*alā* ᶜ*āmmatihim fī ru'yat al-ahilla.* Treatise by Abū Naṣr ... on the disclosure of the error of the Bāṭiniyya (school of thought) with which they have misled their people in the observation of the new moon. *GAS* 6, 245 no.12. Printed: *RN* 6. See Samsó 36, on the Bāṭiniyya school see *EI*², I, 1131-1133.

A 18 *Cat* 21 (p 74) f 109b- 110b rest 70b-71b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn* ᶜ*Alī ibn* ᶜ*Irāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī ḥall al-shubha* ᶜ*araḍat lahu fī'l-maqāla al-thālitha* ᶜ*ashar min kitāb al-Uṣūl.* Letter from Abū Naṣr ... to Al-Bīrūnī on the solution of an uncertainity which came to his (Al-Bīrūnī's) mind, in the 13th book of the *Elements* (of Euclid). *GAS* 5, 339 no. 1. Printed *RN* 7. See *Samsó* 33.

A 19 *Cat* 22 (p 74) f 110a-114a rest 71b-75a. *Faṣl min kitāb li-Abī Naṣr Manṣūr ibn* ᶜ*Alī ibn* ᶜ*Irāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān fī kuriyyat al-samā'.* Chapter from a book of Abū Naṣr ... to Abū'l-Rayḥān (al-Bīrūnī) on the spherical shape of the heaven. *GAS* 6, 245 no. 11. Printed: *RN* 9. See *Samsó* 34.

A 20 *Cat* 23 (p 75) f 114b-115a rest 75b-76a. *Maqāla fī 'stikhrāj sā*ᶜ*āt mā bayna ṭulū*ᶜ *al-fajr wa'l-shams kull yawm min ayyām al-sana bi-madīnat Qā'in li-Abī'l-Ḥasan ibn* ᶜ*Abdallāh ibn Bāmshādh al-Qā'inī.* Treatise on the calculation of the hours between the beginning of dawn and sunrise on every day of the year for the city of Qā'in by ... Al-Qā'inī. *GAS* 5, 337. Printed: *RM* 4. English translation with commentary in Marie L. Davidian, E.S. Kennedy, "Al-Qāyinī on the Duration of Dawn and Twilight," *Journal of Near Eastern Studies*, 20 (1961), 145-153.

A 21 *Cat* 24 (p 76) f 115b-117a rest 76b-78a. *Maqāla fī 'stikhrāj ta'rīkh al-Yahūd wa-a*ᶜ*yādihim ta'līf Abī Ja*ᶜ*far Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī.* Treatise on the calculation of the calendar of the Jews and their feasts, composed by .. Al-Khwārizmī. *GAS* 6, 143 no. 4. Printed: *RM* 1. See E. S. Kennedy "Al-Khwārizmī on the Jewish Calendar", *Scripta Mathematica*, 27 (1964), 55-59.

A 22 *Cat* 25 (p 76) f 117a-118a rest 78a-79a. *Maqāla fī 'stikhrāj ta'rīkh al-Yahūd li-Abī'l-Ḥasan* ᶜ*Alī ibn* ᶜ*Abdallāh ibn Muḥammad ibn Bāmshādh al-Qā'inī.* Treatise on the calculation of the calender of the Jews by ... Al-Qā'inī. *GAS* 6, 243 no. 3. Printed: *RM* 3.

A 23 *Cat* 26 (p 77) and *Cat* 1 (p 60) f 118a-124b, 323, la, rest 79a-87a (f. 1a has been catalogued wrongly as a separate treatise called "Ar-risālatu fī uṣūl al-raṣad"). *Kitāb Ibrahīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fī Ḥarakāt al-Shams.* Book by Ibrāhīm ibn Sinān ... on the movements of the sun. *GAS* 6, 194 no. 1

in his treatise "The Table of Minutes", *Centaurus*, 16 (1972), 1-19; *Samsó* 31.

A 12 *Cat* 15 (p 70) f 93b-96b rest 54b-57b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī'l-burhān ᶜalā ᶜamal Muḥammad ibn al-Sabbāḥ fi'mtiḥān al-shams.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the proof of the procedure of Muḥammad ibn al-Sabbāḥ in observing the sun. *GAS* 6, 244 no. 4. Printed: RN 2. Spanish translation in Samsó 121-133, commentary in *Samsó* 59-66. See also J.Samsó in *DSB* IX, 84.

A 13 *Cat* 16 (p 71) f 96b-98b rest 57b-59b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī'l-dawā'ir allatī taḥuddu al-sāᶜāt al-zamāniyya wa baᶜḍ ma yattaṣilu bi-ᶜamal al-asṭurlāb.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the circles demarcating the unequal hours and on something related to working with the astrolabe. *GAS* 6, 224, no.8. Printed: *RN* 1. Spanish translation in *Samsó* 105-114, commentary in *Samsó* 53-58.

A 14 *Cat* 17 (p 72) f 99a-100a rest 60a-61a. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī'l-burhān ᶜalā ᶜamal Ḥabash fī maṭāliᶜ al-samt fī zījihi.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the proof of the procedures of Ḥabash for the ascension of the azimuth in his zīj. *GAS* 6, 243 no. 2 Printed: *RN* 11. See *Samsó* 32.

A 15 *Cat* 18 (p 72) f 100b-103a rest 61b-64a. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī maᶜrifat al-qisī al-falakiyya baᶜḍiha min baᶜḍ min ghayr ṭarīq maᶜrifatiha bi'l-shakl al-qaṭṭāᶜ wa'l-nisbat al-mu'allafa.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the determination (*lit.* extraction) of the arcs on the sphere from each other without the transversal figure and the compound ratio. *GAS* 5, 339 no. 3. Printed: *RN* 8. German translation in P. Luckey, "Zur Entstehung der Kugeldreiecksrechnung," *Deutsche Mathematik*, 5 (1940), 405-446 See also *Samsó* 32.

A 16 *Cat* 19 (p 73) f 103a-106b rest 64a-67b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī'l-jawāb ᶜan masā'il handasyyia sa'alahu ᶜanhā.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the answer to geometrical questions he (Al-Bīrūnī) asked him (Abū Naṣr). *GAS* 5, 339 no. 4. Printed: *RN* 10. See *Samsó* 33.

"New Light on the Zīj al-Ṣafā'iḥ of Abū Jaᶜfar al-Khāzin", *Centaurus*, 23 (1980) 105-117.

A 7 *Cat* 10 (p 67) f 75b-78a rest 36b-39a. *Maqālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn fī iṣlāḥ shakl min kitāb Mānālāwūs fī'l-kuriyyāt ᶜadala fīhi muṣalliḥū hādhā'l-kitāb ᶜan maslakihi.*[12] Treatise by Abū Naṣr ... on the correction of a proposition in the Spherics of Menelaos, in which the correctors of this book have digressed from his method. *GAS* 5, 339 no. 2. Printed: *RN* 12. Spanish translation in *Samsó* 134-150, commentary in *Samsó* 60-70.

A 8 *Cat* 11 (p 68) f 78a-79b rest 39a-40b. *Maqālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn fī'l-burhān ᶜalā ḥaqīqat al-mas'ala allatī waqaᶜat bayna Abī Ḥamid al-Ṣaghānī wa-bayna munajjimī al-Rayy fīhā munāzaᶜa.* Treatise by Abū Naṣr .. on the demonstration of the truth in the question on which there was a controversy between .. Al-Ṣaghānī and the astronomers of Rayy. *GAS* 6, 244 no.10. Printed: *RN* 13. Spanish translation in *Samsó* 115-120, commentary in *Samsó* 58-59.

A 9 *Cat* 12 (p 69) f 79b-83a, rest 40b-44b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī majāzāt dawā'ir al-sumūt fī'l-asṭurlāb.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the crossings of the azimuthal circles on the astrolabe (i.e. their points of intersection with for example the equator). *GAS* 6, 244 no. 6. Printed *RN* 14. Spanish translation in *Samsó* 89-104, commentary in *Samsó* 49-53.

A 10 *Cat* 13 (p 69) f 83b-86b, rest 44b-47b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī ᶜAbdallāh Muḥammad ibn Aḥmad al-Ma'mūnī fī ṣanᶜat al-asṭurlāb bi'l-ṭarīq al-ṣināᶜī.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Ma'mūnī on the construction of the astrolabe in the practical way. *GAS* 6, 244 no.5. Printed: *RN* 15. Spanish translation in *Samsó* 75-88, commentary in *Samsó* 46-49.

A 11 *Cat* 14 (p 70) f 86b-93b rest 47b-54b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī al-musammā jadwal al-daqā'iq.* Letter from Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī, called the Table of Minutes. *GAS* 6, 244 no. 7. Printed *RN* 5. See C. Jensen, "Abū Naṣr Manṣūr's approach to spherical astronomy as developed

12. The word used in the manuscript is *mushkilihi* (instead of *maslakihi*), which makes little sense in the context. *RN* and Samsó read *shaklihi*. The word *maslak* also occurs at the beginning of the treatise (f. 75b:14,15 = *RN* 12, 3:10,12), thus confirming my reading.

A

A 1 *Cat* 4 (p 63) f 40a-42b rest 1a-3b. *Maqāla li-Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fī rasm al-quṭūᶜ al-thalātha.* Treatise by Ibrahīm ibn Sinān ... on drawing the three conic sections. *GAS* 5, 293 no. 1. Printed: *RI* 4. Russian translation in "Ibrahīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra, Kniga o postroenii treh honičeshik sečenii", *IMI* 16 (1965).

A 2 *Cat* 5 (p 63) f 42b-45a rest 3b-6a. *Risāla li-Ibrāhīm ibn Sinān ilā Abī Yūsuf al-Ḥasan ibn Isrā'īl fi 'l-aṣṭurlāb.* Letter from Ibrāhīm ibn Sinān to Abū Yūsuf... on the astrolabe. *GAS* 6, 194 no. 2. Printed: *RI* 1.

A 3 *Cat* 6 (p 64) f 45a-47b rest 6a-8b. *Risāla fi'l-abᶜād wa'l-ajrām ᶜan Kūshyār ibn Labbān al-Jīlī.* Letter on the distances and sizes (of the celestial bodies) by Kūshyār ibn Labbān ... (This is part of *Al-Zīj al-jāmiᶜ* by the same author, see *GAS* 6, 248, no.1) Printed: *RM* 11. See *Kennedy*, 125, 156-157.

A 4 *Cat* 7 (p 65) f 47b-50b rest 8b-11b. *Risālat Abī'l-Wafā' Muḥammad ibn Muḥammad al-Būzjānī ilā Abī ᶜAlī Aḥmad ibn ᶜAlī ibn al-Sukr fī iqāmat al-burhān ᶜalā 'l-dā'ir min al-falak min qaws al-nahār wa'rtifāᶜ niṣf al-nahār wa'rtifāᶜ al-waqt.* Letter from Abū'l-Wafā' ... to Abū ᶜAlī ... on establishing the proof of the (rule for finding the) arc of revolution from the day arc, the noon altitude and the altitude at the time. *GAS* 6, 224, no. 3. Printed: *RM* 5. See Nadi Nadir, "Abū'l-Wafā' on the Solar Altitude", *The Mathematics Teacher* 51 (1960), 460-3. Dr. Richard Lorch and Dr. Haskell Isaacs have prepared an English translation, to be published in due course.

A 5 *Cat* 8 (p 66) f 50b-66b rest 11b-27b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fi barāhīn aᶜmāl jadwal al-taqwīm fī zīj Ḥabash al-Ḥāsib.* Letter by Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the proofs of the procedures of the table of rectification in the Zīj of Ḥabash ... *GAS* 6, 342 no. 1. Printed RN 4. See *Samsó* 30; R. Irani, *The "Jadwal al-Taqwīm" of Ḥabash al-Ḥāsib*", thesis, American University of Beirut, 1956; *Kennedy*, 153 ; the article Ḥabash al-Ḥāsib by W. Hartner in *EI*², *III*, 8-9.

A 6 *Cat* 9 (p 67) f 66b-75b rest 27b-36b. *Risālat Abī Naṣr Manṣūr ibn ᶜAlī ibn ᶜIrāq Mawlā Amīr al-Mu'minīn ilā Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī fī taṣḥīḥ mā waqaᶜa li-Abī Jaᶜfar al-Khāzin min al-sahw fī zīj al-ṣafā'iḥ.* Letter by Abū Naṣr ... to ... Al-Bīrūnī on the correction of what Abū Jaᶜfar al-Khāzin overlooked in the Zīj of Plates. *GAS* 6, 243 no.3. Printed *RN* 3. See *Samsó* 30; M. T. Debarnot, "Introduction du Triangle Polaire par Abū Naṣr b.ᶜIrāq," *JHAS* 2 (1978), 126-136. On the Zīj of Plates see D. King,

The title of every treatise will be rendered in Arabic, exactly as it occurs in the manuscript, and also in English translation. I have made some explanatory additions in brackets. Arabic names will be rendered in abbreviated form in the translations ;thus, for example, Abū'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī will be abbreviated to .... Al-Bīrūnī.

Reference will be made to such modern editions, translations and other relevant publications as are known to me. The cyrillic alphabet will be transcribed according to the system used in the *Mathematical Reviews* and the *Zentralblatt für Mathematik*.

Practically the whole manuscript has been printed (in Arabic) by the Osmania Oriental Publication Bureau (Dā'irat al-Maᶜārif al-ᶜUthmānīyya) in Hyderabad, in several volumes. These volumes will be abbreviated as indicated below. The notation "$XY\ p,\ q{:}r$" always refers to line r of page q of the p-th text in volume XY.

RB = *Rasā'ilu'l-Bīrūnī. Containing four tracts.* 1367 H./1948 A. D.

RH = *Majmūᶜ al-Rasā'il li'l-ᶜallāma al-failasūf Abū ᶜAlī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haytham*, 1358 H, plus the appendix: *Risāla fī khawāṣṣ muthallath min jihat al-ᶜamūd*, 1366 H./1947 A.D.

RI = *Rasā'ilu ibn-i-Sinān, by Ibrāhīm b. Sinān' b. Thābit b. Qurra al-Ḥarrānī, containing six tracts.* 1367H./1948 A.D.

RM = *Rasā'ilu 'l-Mutafarriqa fī'l-Hai'at li'l-mutaqaddimīn wa muᶜāsiray il-Bīrūnī. Containing eleven important treatises on astronomy and other subjects contributed by the famous predecessors and contemporaries of Al-Bīrūnī* (9th, 10th, 11th century A.D.). 1367 H./1948 A.D.

RN = *Rasā'il Abī Naṣr ilā 'l-Bīrūnī, by Abū Naṣr Manṣūr b. ᶜAlī b. ᶜIrāq, for Al-Bīrūnī. Containing fifteen tracts.* 1367 H./1948 A.D.

RT = *Rasā'ilu ibn Qurra, by Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī. Containing translations of two geometrical tracts of Archimedes.* 1366 H./1947 A.D.

Inb = *Muḥammad b. al-Ḥasan al-Karkhī, Inbāṭ al-miyāh al-khafīyya.* 1359 H./1940 A.D.

The following abbreviations will also be used.

GAS = F. Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums* (Leiden, Brill), Band 5, Mathematik, 1974; Band 6, Astronomie, 1978; Band 7, Astrologie, Meteorologie und Verwandtes, 1979.

DSB = *Dictionary of Scientific Biography*, 15 vols (New York: Scribner's Sons, 1972-78).

EI[2] = *Encyclopaedia of Islam*, second edition. (Leiden-London: Brill, 1960 - .....).

Cat. (or catalogue), see footnote 1.

Dimirdāsh m:n = line *n* of page *m* of *Istikhrāj al-awtār fī'l-dā'ira bi-khawāṣṣ al-khaṭṭ al-munḥanā al-wāqiᶜ fīhā. Ta'līf Abī'l-Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī. Taḥqīq al-ustādh Aḥmad Saᶜīd al-Dimirdāsh. Murājaᶜat al-ustādh ᶜAbdalḥamīd Luṭfi* (in Arabic). (Cairo, no date). This is the edition by Dimirdāsh of Al-Bīrūnī's *Extraction of Chords.*

Kennedy = E. S. Kennedy, "A survey of Islamic astronomical tables." *Transactions of the American Philosophical Society, New Series*, vol. 46, part 2. (Philadelphia, 1956).

Samsó = J. Samsó Moya, *Estudios sobre Abū Naṣr Manṣūr b. ᶜAlī b. ᶜIrāq* (in Spanish). Barcelona 1969.

JHAS = *Journal for the History of Arabic Science.*

IMI = *Istoriko-matematičeskie Issledovanija* (in Russian).

These numbers correspond to a division of the first part of **A** into 29 gatherings, almost all consisting of 8 leaves, in the following way:

40–45 (?), 46–53, 54–61, 62–69, 70–77, 78–85, 86–93, 94–101, 102–109, 110–117 (nos. 1-10); 118–124 + 323, 1 + 131–137, 138–145, 146–153, 154–161, 162–169, 170–177, 178–185, 186–193, 194–195 + 125–130 (nos. 11–20); 196–203, 204–211, 212–217 + 220, 221–228, 229–236, 237–244, 245–252, 253–260, 261–268 (or 266?) (nos. 21–29).

We can now describe the effect of the rebinding on **A** as follows: The gatherings 11, 12 and 20 fell apart and the pieces were rebound in the wrong order.

The situation regarding the rest of **A** is more obscure. At the top of f. 267a there is a clear لو (36). This may be a scribal error resulting from the fact that the treatise numbered 36 also begins on f. 267a. F.269 has a ل (30) with perhaps another (illegible) letter attached to it. f. 282 has clearly لب (32). I have not found other numbers indicating gatherings of **A**, which does of course not imply that such numbers never existed. The text on ff. 267a-282a and 282b-298 + 326 is continuous.

B, **C** and **D** are undated fragments of texts, written in the same hand as **A**.[11] I have not found any letter indicating a gathering, nor any marginal number in **B**, **C** and **D**, It is therefore conceivable that **B**, **C** and **D** are remainders of what was originally a separate manuscript to which **A** did not belong. The contents of **B**, **C** and **D** will be listed in section 3.

E is a fragment of a treatise on stellar constellations written in Persian in another hand and obviously at a later date. I shall not discuss it further.

At the very beginning of the manuscript there is an index, which was also compiled at a later date. This index must have been added after the manuscript had been rebound, because it corresponds to its present state.

3. *The contents of* A, B, C and D

This section is a list of the treatises and fragments in **A**, **B**, **C** and **D**.

The notation "**A 1** *Cat* 4 (p 63) f 40a-40b rest 1a-3b" means that the relevant treatise is part of **A**, that it is numbered 1 in the margin of the manuscript, 4 in the catalogue[1] (on page 63) and the secondary literature, that it is on ff. 40a-42b in the numbering of the manuscript but on ff. 1a-3b in the "restored" numbering of **A**. I have devised this "restored" numbering in such a way that it corresponds to the correct order of the leaves.

11. Another manuscript written by the scribe of **A**, **B**, **C** and **D** is MS Berlin, Ahlwardt 5658, now Tübingen, Or. Quart. 71, containing the *Stellar Constellations* (*Ṣuwar al-Kawākib*) by ᶜAbdarraḥmān al-Ṣufī. See *GAS* 6, 214 and the facsimile of the colophon of this manuscript (dated 630 H., Mosul), plate 10 in:
Abū'l-Ḥusayn ᶜAbdu'r-Raḥmān as-Ṣūfī, Ṣuwaru'l-Kawākib or Uranometry, edited from the oldest extant Mss. and based on the Ulugh Beg Royal Codex, Hyderabad (Dā'irat al-Maᶜārif al-ᶜUthmānīyya), 1373 H./1954 A.D.

tion in the text between f. 217b and f. 220a.[10] The leaves were numbered after being rebound in the wrong order, so the numbers are of no help in establishing the correct order of the treatises. The last leaf of the manuscript is not numbered.

The manuscript can be divided into five continuous parts **A**, **B**, **C**, **D** and **E**. These parts consist of the following leaves in the following order:

A = 40—124, 323, 1, 131—195, 125—130, 196—217, 220—298, 326.

B = 325, 322, 299—305, 309—316.

C = 324, 321, 318, 320, 319, 306—308, 2—39.

D = 317.

E = the last leaf of the manuscript.

A contains 40 complete treatises. These are numbered 1-40 in the margin of the manuscript in eastern Arabic numbers. A list of the 40 treatises is in section 3.

All treatises in **A** were written in Mosul. The copyist wrote on f. 188b that he finished the first 30 treatises in Muḥarram 632 H./Sept.-Oct. 1234 A.D. The remaining treatises 31-40 are dated separately: nos. 31 and 32 (ff. 189a-193b) were written in Ṣafar 632 H./Oct.-Nov. 1234 A.D., nos. 33 and 34 (194a-195, 125-130, 196-244b) in Dhū'l-Ḥijja 631/Aug.-Sept.1234, no. 35 /(245a-266b) in Dhū'l-Qaᶜda 631/July-Aug. 1234, nos. 36-38 (267a-280a) in Muḥarram 632/Sept.-Oct. 1234, no. 39 (280a-282a) in Ṣafar 632/Oct.-Nov. 1234, and no. 40 (282b-298, 326a) at the end of Dhū'l-Qaᶜda 631/Sept. 1234. So the order of the treatises in **A** and their marginal numbers do not correspond to the order in which they were copied. But it is likely that the same copyist who wrote the treatises also numbered them, because the numbers in the margin are written in exactly the same way as the numbers in the text.

At the top of some of the leaves of **A** one can make out Arabic letters whose numerical values indicate the numbers of gatherings. These letters and their numerical values are rendered below, because they show what happened to **A** when it was rebound incorrectly.

The tops of many pages of the manuscript are damaged. But one can read a fragment of a ج (3), a fragment of a د (4), a clear و (6), a fragment of a ز (7), and a ط (9) on ff. 54, 62, 78, 86, 102 respectively; ى (10), يا (11), يج (13), يد (14), يه (15), يو (16), يز (17) and يط (19) on ff. 110, 118, 138, 146, 154, 162, 170, 186 respectively; and ك (20), كا (21), كب (22), كج (23), كد (24), كه (25), كو (26), كز (27), كح (28) and كط (29) on ff. 194, 196, 204, 212, 221, 229, 237, 245, 253 and 261 repectively.

10. See E. S. Kennedy, *The Exhaustive Treatise on Shadows by Abū al-Rayḥān Muḥammad b. Aḥmad al-Bīrūnī* (Aleppo: JHAS, 1976), vol. 1 (translation), p. 174 note 4.

In section 2 I shall discuss this division and shall investigate what happened to the manuscript when it was rebound.

Section 3 consists of a list of all the treatises and fragments in the manuscript (with the exception of the last leaf), in the correct order and with bibliographical references. Because the numbering on the manuscript corresponds to the present incorrect order of the leaves, I have devised a "restored" numbering corresponding to the original correct order of the leaves. All treatises will be listed in dual numbering. Saidan's statements on the order of the disarranged treatises appear to be correct, apart from a very few exceptions.

M. Dimirdāsh used MS Bankipore 2468 for his edition of the Arabic text of the "Extraction of Chords" of Al-Bīrūnī. However, Dimirdāsh did not fully realize to what extent the manuscript had become disarranged; thus his edition also contains parts of 1. and 2. Detailed references will be given in section 3.

Sections 4-6 deal with the three fragments in the manuscript. In section 4 I shall attempt to prove by means of references in other works of Al-Bīrūnī that one fragment is part of 1. So Hermelink and Saidan correctly identified this fragment.

Section 5 deals with a second fragment, which was identified by Saidan as part of the "Exquisite Problems" of Ibrāhīm ibn Sinān. I shall attempt to prove that this identification is correct by means of a passage in a work of Al-Sijzī,[8] in which Al-Sijzī refers to the "Exquisite Problems" of Ibrāhīm ibn Sinān. I give English translations of the reference and of the passage in the "Exquisite Problems" to which reference is made. These translations may also give the reader an impression of the contents of the "Exquisite Problems".

Section 6 consists of a brief discussion of the reasons why the third fragment probably is the above-mentioned work 3. of Al-Bīrūnī.

2. *The manuscript and the correct order of its leaves*

The first 324 leaves of the manuscript are numbered 1-326 in eastern Arabic numbers.[9] There are no leaves numbered 218 and 219, but there is no interrup-

8. On Al-Sijzī see *GAS* 5, pp. 329-334.

9. The manuscript has apparently been rebound again in recent times. Professor Toomer's photographs show the effects of a second rebinding; at the time that these were taken the leaves of the manuscript were in the following order: 1-262, 264, 266, 263, 265, 267-304, 308, 306, 307, 305, 309-313, 315, 314, 317, 316, 318-326, last leaf.

Thus on the photographs f. 262b appears next to f. 264a, f. 264b appears next to f. 266a, et cetera.

No effects of the second rebinding are visible on the film which the Oriental Public library sent to Leiden in 1980; on this film f. 262b is next to f. 263a etc.

Somebody attempted to change the numbers 263, 264, 265, and 266 into 264, 265, 266, 267 respectively. I refer to the original numbers (these are still legible).

order of the leaves in the manuscript. Thus the printed text is not in the correct order in the *Rasā'il al-Bīrūnī* in "*Istikhrāj al-Awtār*" (the Extraction of Chords) and "*Ifrād al-Maqāl fī Amr al-Ẓilāl*" (the Exhaustive Treatise on Shadows) and in the *Rasā'il ibn Sinān* in "*Kitāb fī Ḥarakāt al-Shams*" (Book on the Movements of the Sun) and "*Al-Handasa wa-ʿilm al-Nujūm*" (Geometry and Astronomy). The parts of the manuscript that were printed as "*Istikhrāj al-Awtār*" and "*Al-Handasa wa ʿilm al-Nujūm*" contain fragments of three works which do not exist elsewhere. These can be identified as

1. "Treatise on the Solution and the Division of the (solar) Equation" (*Maqāla fī'l-taḥlīl wa'l-taqṭīʿ fī'l-taʿdīl*) by Al-Bīrūnī,

2. the "Exquisite Problems" (*Al-masā'il al-mukhtāra*) by Ibrāhīm ibn Sinān,

3. "Treatise on (the fact) that the necessities of the infinite subdivisibility of magnitudes are related to the matter of the two lines which approach each other but do not meet in the distance" (*Maqāla fī anna lawāzim tajazzu' al-maqādīr ila lā nihāya qariba min amr al-khattayn alladhayn yaqrubān wa-lā yaltaqiyān fī'l-istibʿād*), a work by Al-Bīrūnī on parallels.

Most of what has been mentioned above was already described in 1960 in a remarkable article by Saidan.[5] Relying completely on the printed texts in the *Rasā'il al-Bīrūnī* and the *Rasā'il ibn Sinān*, Saidan attempted to re-establish the correct order of the treatises. He correctly identified the fragments of 1. and 2., without, however, giving detailed evidence for the identification. The fragment of 3. was identified correctly by Saidan in 1973 and also by Bulgakov and Ahmedov in 1977.[6] It should be noted that the fragment of 1. was also identified correctly by Hermelink in 1956.[7] Unfortunately these results have not yet been incorporated in F. Sezgin's *Geschichte des Arabischen Schrifttums*.

Following the suggestion made by Saidan in his 1960 paper I have studied the manuscript Bankipore 2468. This paper contains the result of my research. It appears that the manuscript can be divided into five disconnected parts.

5. A.S. Saidan. "The *Rasā'il* of Bīrūnī and Ibn Sinān, A Rearrangement", *Islamic Culture*, 34 (1960), 173-175.

6. A. S. Saidan, ,,The Trigonometry of al-Biruni", *Al-Biruni Commemoration Volume*, ed. Hakim Muhammed Said (Karachi: Hamdard Academy, 1973), p. 690, and P. G. Bulgakov, A.A.Ahmedov, "Beruni i Al-Kindi o teorii parallel'nih"(in Russian), *Obščestvennie nauki b Uzbekistane* (1977), 30-36.

7. H. Hermelink. "Al-Bīrūnī:Lehrbriefe. Vier Abhandlungen aus der mathematisch-astronomischen Sammelhandschrift Bankipore Nr. 2468", *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* 54 (1956) 2.

Rearranging the Arabic Mathematical and Astronomical Manuscript Bankipore 2468

J. P. Hogendijk*

Acknowledgements

At the request of Dr. J. J. Witkam, keeper of the Oriental manuscripts in the Library of the University of Leiden, the staff of the Oriental Public Library in Patna kindly sent a microfilm of MS Bankipore 2468. Professor G. J. Toomer, Providence, lent me his excellent photographs of the manuscript during my visit to Providence in 1981, which was financially supported by the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.). The Chester Beatty Library, Dublin, sent a microfilm of Arabic MS 3652 to Leiden, and Professor Sezgin, Frankfurt Main showed me his copies of MS Istanbul, Resit 1191. Professor E. S. Kennedy and Dr. R. Lorch, Aleppo, Dr. H. J. M. Bos, and Dr. Kruk ,Utrecht and Professor G. Saliba, New York, made helpful suggestions. Miss S. M. McNab, Utrecht, made linguistic improvements. The support of the above-mentioned persons and institutions is gratefully acknowledged.

1. *Introduction*

The Arabic manuscript Bankipore 2468 (now 2519)[1] in the Khuda Bakhsh Oriental Public Library in Patna (India) consists of a valuable collection of over forty treatises by medieval Islamic mathematicians and astronomers The greater part of the manuscript was written in 631-2 H./1234 A.D. in Mosul.

Somewhere in its history the manuscript fell apart and several leaves were lost. It was rebound in an incorrect order; as a consequence the leaves of several treatises of Al-Bīrūnī[2] (362 H./972 A.D.- 440 H./1048 A. D.) and Ibrāhīm ibn Sinān[3] (296 H./909 A.D. - 335 H./946 A.D.) are displaced.

The Osmania Oriental Publications Bureau in Hyderabad printed the disarranged parts of the manuscript in the *Rasā'il al-Bīrūnī* (1367 H./1948 A.D.)[4] and the *Rasā'il ibn Sinān* (same year),[4] following in most cases the incorrect

*History of Math. Dept. Box 1900, Brown University Providence R. I. 02912, USA.

1. See Maulavi Abdul Hamid, *Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bankipore*, vol. 22, Arabic Mss, Science (Patna, 1937), pp. 60-92.

2. On the life of Al-Bīrūnī see the article by E. S. Kennedy in *DSB* II, 147-158. The mathematical and astronomical works of Al-Bīrūnī have been listed in *GAS* 5, 375-383 and 6, 261-267. and D. J. Boilot, "L'œuvre d'al-Berūnī: Essai bibliographique", *Mélanges. Institut Dominicain d'Etudes Orientales du Caire*, 2 (1955), 161-256. Complete bibliographical references to *GAS* and *DSB* are in section 3.

3. On Ibrāhīm ibn Sinān see *GAS* 5, pp. 292-295 and 6. pp. 193-195.

4. Complete references are in section 3.

Bibliography

Ashkāl. Naṣr b. ʿAbdallāh, "Risāla fī anna ashkāl kullahu min al-dāʾira", MS Bankipore 2468, ff. 280r - 282r.

Muammer Dizer, "Dāʾirat al-Muʿaddal in the Kandilli Observatory", *Journal for the History of Arabic Science*, 1 (1977), 257-260 + 2 pages of plates.

David A. King, "Al-Khalīlī's *Qibla* Table", *Journal of Near Eastern Studies*, 34 (1975), 81-122.

Louis Janin & David A. King, "Ibn al-Shāṭir's Ṣandūq al-Yawāqit: An Astronomical Compendium", *Journal for the History of Arabic Science*, 1 (1977), 187-256.

Richard Lorch, "Al-Khāzinī's 'Sphere That Rotates by Itself", *Journal for the History of Arabic Science*, 4 (1980). 289-329.

Abū'l-Ḥasan al-Marrākushī, *Jāmiʿ al-mabādiʾ wa'l-ghāyāt*, second part, MS Paris Bibliothèque Nationale 2508 (formerly 1148).

Jamil Ragep & E. S. Kennedy, "A Description of Ẓāhiriyya (Damascus) MS 4871: a Philosophical and Scientific Collection", *Journal for the History of Arabic Science*, 5 (1981), 85-108.

Hugo Seemann & Th. Mittelberger, "Das kugelförmige Astrolab", *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, 8 (1925), 1-69.

Peter Schmalzl, *Zur Geschichte des Quadranten bei den Arabern*, (München, 1929).

Fuat Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums* (Leiden: E. J. Brill, 1974), vols. V and VI.

Sevim Tekeli, "'Equatorial Armilla' of ʿIz al-Din b. Muḥammad al-Wafai and Torquetum", *Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakultesi Dergisi*, 18 (1962), 227-259.

circle that passes through the points G and D–circle GHD. We cut off from arc HD [an arc] equal to the difference between the two longitudes – arc HT. Through points Z, T we draw a circle that lies on the surface of the sphere – circle $LZTK$. From arc ZT in the direction of TZL we cut off [an arc] equal to the latitude of Mecca – arc TM. Through points E, M we draw arc EMN. Then we join point N and the intersection of lines AB, GD, which is point S, by the line SN. I say: SN is the straight line that passes through the foot of the *imām* and the *Kaᶜba*.

Proof: Because the pole of the equator is point Z and points G, D are on the equator, arc $GHTD$ in the semicircle of the equator; and because HT is the difference between the longitudes, semicircle $LZTK$ [is the meridian of Mecca and] the *Kaᶜba* is bisected by it. Point M is the zenith of Mecca and point E is the zenith for the town [مدينة]. So circle EMN is the circle passing through the azimuth of the *Kaᶜba*, and the line NS is the line passing through the foot of the *imām* who leads the people in prayer and through the *Kaᶜba*. These premises and these principles that we have mentioned in this treatise I have set forth in a treatise on the structure of the celestial spheres. If there is someone seeking the azimuth of the *qibla* at the place known as the equator line, then he does these operations with circle GDE and dispenses with circle $GHTD$, because the pole of the equator is then at the level of point B and the region has no latitude there [i.e. on the equator]. The remaining operations of it [the instrument] I portray in this diagram. God is beneficent to what is right.

The treatise is finished. Praise be to God, the Lord of the Universe, and His blessings be upon His Prophet Muḥammad and all his family! Copied in Baghdad in the year 557 from the exemplar of the *qāḍī* Ibn al-Murakhkhim, which was poor. It should be compared with another transcription, God willing (be He exalted!). He is sufficient for me.

3. *Translation*

In the name of God, the Merciful, the Compassionate.

The treatise of Naṣr b. ᶜAbdallāh the Geometer[10] *on the Determination of the Azimuth of the Qibla.*

[This has been written] because necessity calls on people to build cities and mosques in them and also because the construction of the *miḥrāb* needs knowledge of the azimuth on which the *miḥrāb* must be constructed, since the purpose in constructing the *miḥrāb* is that the *imām* face towards the *Kaᶜba* – because the prayer of the *imām* is the prayer of those who pray behind him. Seeking this object by way of calculation is difficult. There came to me a method, easy and close to hand, by means of an instrument that takes the form of a hemisphere. I have already mentioned this method in another treatise. Whoever comes across that method should know that it is that; and if something [in that treatise] contradicts this treatise, it is because it was a long time ago and I do not remember it. So I did the treatise again, and I describe for you how to operate with this instrument, as follows.

A well-formed hemisphere is taken, as accurate as possible, and two semicircles are drawn on it that intersect at right angles and pass over the convexity [of the sphere]. Then we go to an open place and take in it an even surface parallel to the horizon. On this surface a straight line is drawn, which is the meridian-line and conformable to it [i.e. is called the meridian-line and is in the same direction as the real meridian]. A line is also drawn at right angles to this line. Let the intersection be the point S.

This common section [belongs] to the intersection of the horizon-circle and the equator-circle. So if we want to determine the azimuth of the *qibla*, we draw on the even surface a circle whose centre is the intersection of the two straight lines previously mentioned, which [the intersection] is point S, and whose semidiameter is equal to the semidiameter of the circle that is the baseof the hemisphere. Then we fit the hemisphere on this circle [so that] the common section [belongs] to the intersection of the two circles delineated on the hemisphere and the plane of the horizon-circle – I mean the even [surface] in which we drew the two lines at right angles. Then at the ends of the meridian-line and the ends of the equator-line we inscribe A, B, G, D, making point A the southern side, B the northern side, G the eastern side and D the western side. On the convexity of the sphere we mark point E at the intersection of the two arcs. Then from point B towards point E [من ناحية نقطة بَ الى ما يلي نقطة هَ] we cut off [an arc] equal to the latitude of our region [بلد] – let this arc be BZ. We make point Z a pole and on the surface of the sphere we draw a

10. The translation *geometer* has been used instead of the more usual *engineer*, *architect*, since this meaning seems to be required here and can find support, for instance, in the usage of the translator of Eutocius (see *Journal for the History of Arabic Science*, 5 (1981), p. 168).

بسم الله الرحمن الرحيم

رسالة نصر بن عبد الله المهندس في استخراج سمت القبلة فلان الضرورة تدعو[1] الناس إلى بناء المدن والمساجد[2] فيها كذلك حاجتهم إلى المعرفة بالسمت الذي عنه يكون نصب المحراب ضرورياً[3] وذلك ان الغرض في نصب المحراب هو ان يكون الامام وجهه نحو البيت الحرام فان صلاة الامام هو صلاة من يصلي وراءه وطلب هذا المعنى من طريق الحساب صعب وقد اتفق لي طريقة سهلة قريبة المأخذ بآلة تتخذ شبه نصف[4] كرة وكنت قبل هذا ذكرت هذه الطريقة < في > غير هذه الرسالة فمن تقع اليه تلك الطريقة فيجب ان [ان] يعلم أنها ذلك وان خالف شيء [شبه] هذه الرسالة فاني بعيد العهد لم اتذكره فعملت الرسالة ثانياً وانا واصف لك العمل بهذه الآلة من هاهنا .

تتخذ نصف كرة حسنة التقدير احكم ما يمكن وندار عليه نصفا دائرتين تتقاطعان على زوايا قائمة وتمران بالحدبة ثم نعمد الى مكان مكشوف ونتخذ فيه سطحاً مستوياً موازياً الدائرة الأفق ويخرج من ذلك السطح خط مستقيم يكون خط نصف النهار ومطابقاً له ويخرج فيه ايضاً خط يكون على هذا الخط على زوايا قائمة وليكن التقاطع نقطة سَ ويكون ذلك الفصل[5] المشترك لتقاطع دائرة الافق ودائرة معدل النهار فاذا اردنا ان نستخرج سمت القبلة فانا ندير[6] في السطح المستوى دائرة يكون مركزها تقاطع الخطين المستقيمين اللذين تقدم ذكرهما التي هي نقطة سَ ويكون نصف قطرها مثل نصف قطر الدائرة التي هي قاعدة نصف الكرة ثم نطبق نصف الكرة على هذه الدائرة انطباقاً به يكون الفصل المشترك لتقاطع الدائرتين المخطوطتين[7] على نصف الكرة وسطح دائرة الافق اعني المستوى الذي اخرجنا فيه الخطين المستقيمين على زوايا قائمة ثم نكتب على طرفي خط نصف النهار وطرفي خط الاستواء آ بَ جَ دَ ونجعل نقطة آ ناحية الجنوب و بَ ناحية الشمال وجَ ناحية المشرق ودَ ناحية المغرب ونعلّم على حدبة الكرة عند < ا > نقطاع القوسين نقطة هَ ثم نفصل من ناحية

١— يدعوا
٢— والمساعد
٣— ضرورية
٤— ونصف
٥— الفضل
٦— نريد
٧— المحلوطتين

نقطة ب الى ما يلي نقطة ه مثل عرض بلدنا وليكن تلك القوس ب ز ونجعل نقطة ز قطباً وندير في بسيط الكرة دائرة تمر بنقطتي ج و د وهي دائرة ج ح د ونفصل من قوس ح د مثل الفضل ما بين الطولين وهي قوس ح ط ونجيز على نقطتي ز ط دائرة تمر في بسيط الكرة وهي دائرة ل ز ط ك ونفصل[8] من قوس ز ط إلى ما يلي[9] ط ز ل مثل عرض مكة وهي قوس ط م ونجيز على نقطتي ه م قوس ه م ن ثم نصل بين نقطة ن وتقاطع خطي ا ب ج د التي هي نقطة س بخط س ن فاقول س ن هو الخط المستقيم الذي يمر بقدم الامام والكعبة .

برهانه لان قطب معدل النهار نقطة ز ونقطتا[10] ج د على معدل النهار يكون قوس ج ح ط د نصف دائرة معدل النهار ولان ح ط فضل ما بين الطولين يكون نصف دائرة ل ز ط ك نصف بها الكعبة ونقطة م سمت رأس اهل مكة ونقطة ه سمت رأس اهل المدينة فدائرة ه م ن هي الدائرة المارة بسمت الكعبة وخط ن س الخط المار (بقد)م الامام الذي يصلي بالناس وبالبيت وهذه المقدمات والاصول التي ذكرناها في هذه الرسالة قدمتها في رسالة في تركيب الافلاك فاما اذا كان الانسان الطالب لسمت القبلة في الموضع المعروف بخط الاستواء[11] فانه يعمل هذه الاعمال بدائرة ج د ه ويستغنى عن دائرة ج ح ط د لان قطب معدل النهار حينئذ يكون بمنزلة نقطة ب وليس هناك للبلد عرض وباقي الاعمال منها[12] وصفته[13] في هذا الشكل والله الموفق للصواب .

تمت الرسالة والحمد لله رب العالمين وصلواته على نبيه محمد وآله اجمعين نقله في سنة ٥٥٧ ببغداد من خط القاضي ابن المرخم وكان سقيما فليقابل بنسخ اخرى ان شاء الله تعالى وهو حسبي .

٨– ونفصّل
٩– (ما يلى) ه مالى
١٠– ونقطه
١١– الاستوآ
١٢– مدسا (؟)
١٣– وصنعته changed from ؟

MS Damascus Ẓāhiriyya 4871, f. 83r. Reproduced by kind permission.

with projected circles was followed to find the *qibla* with the astrolabe-quadrant.[9] It is surprising that al-Wafāʾī did not adapt his *dāʾirat al-muʿaddal* to the purpose, for all that would be needed would be graduations on the semicircular sighting-vane and an extra quadrant that could stand upright on the horizon-circle.

Naṣr b. ʿAbdallāh says he has written before on the subject in a treatise, which seems to be lost, on *tarkīb al-aflāk*, probably one of the books on astronomy that follow Ptolemy's *Hypotheses*.

Note added in proof. Mr. J. P. Hogendijk tells me that the treatise on the circle as the origin of all plane geometrical figures is probably by al-Sijzī. For his reasoning see his article in this issue, §A 39. If this is correct, the tentative dating of Naṣr b. ʿAbdallāh in the first three sentences of this article must be ignored.

2. *The Text*

The text is taken from the only known MS, Damascus Ẓāhiriyya 4871, f. 83r. For a description of the whole codex see Ragep & Kennedy. From this article the transcription of "Ibn al-Murakhkhim" in the colophon was taken. Angle brackets, < >, indicate additions; square brackets, [ ], words to be deleted; and round brackets, ( ), restorations from a physically demaged part of the MS. The apparatus gives the MS-reading when the text has been emended. *Hamzas* have been silently added, but several grammatical mistakes have been left. In the translation, which is as literal as possible, square brackets indicate words not in the text as given below.

9. Schmalzl, pp. 61-62.

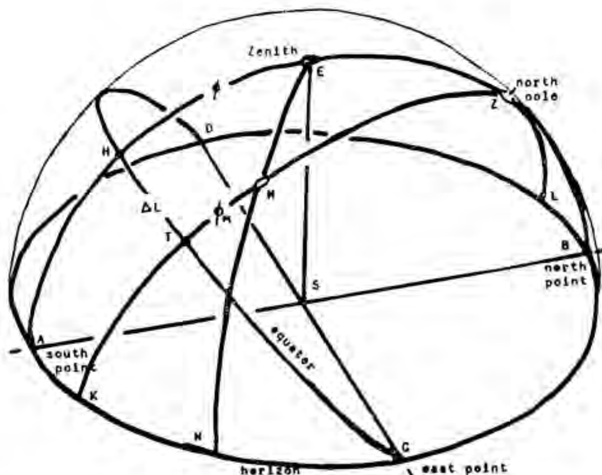


Fig. 1. The case represented here is for a place west of Mecca. The semicircle *GED* is omitted for clarity.

is known and a rule, fitting the sphere, for use when two of the circle's points are known. The rule must be graduated so that the latitudes and longitude-difference can be marked off. No indication is given about the nature of these instruments, but suitable compasses are described in the thirteenth-century *Libros del Saber*,[5] and a suitable rule is described by al-Marrākushī for use with his "solid sphere".[6]

Essentially the same procedure is given by ʿAbd al-Raḥmān al-Khāzinī in the fifteenth application of his "sphere that rotates by itself".[7] In this case the pole and equator-circle are already marked and the only extra mark made on the sphere is a dot at the position of Mecca; a rule is used to join this dot and the local zenith to find the azimuth of Mecca on the horizon-circle. Since the sphere is being used here purely as a "solid sphere", or *dhāt al-kursī*, further research may well reveal this determination of the *qibla* in other treatises on this instrument. Further, one of the uses of the spherical astrolabe, which was furnished with a horizontal co-ordinate-system, was to find the azimuth of one place with respect to another.[8] The equivalent procedure

5. Seemann & Mittelberger, p. 54.

6. Al-Marrākushī, f.15v, lines 13-16.

7. Lorch, pp. 314, 324.

8. Seemann & Mittelberger, p. 27.

Nasr b. ᶜAbdallāh's Instrument for Finding the *Qibla*

Richard Lorch*

1. *Introduction*

According to Sezgin (V, 314 and VI, 208),[1] Naṣr b. ᶜAbdallāh, the author of the text given below, was called al-ᶜAzīzī and wrote treatises on eclipses and on the circle as the origin of plane geometrical figures. For his date the only evidence appears to be the passage at the beginning of the latter treatise, where he says he has already written a book on the subject "for the library of the King al-Manṣūr" (*li-khizānat al-malik al-Manṣūr*).[2] The cataloguer of the manuscript confidently identifies this *al-Malik al-Manṣūr* as Manṣūr ᶜAḍūd al-Dawla, thus putting Naṣr b. ᶜAbdallāh in the latter half of the fourth/tenth century. The instrument that the author describes here is one of the few that find the *qibla* (the direction of Mecca) geometrically. The *qibla* may be found with other instruments, such as the sinecal quadrant,[3] by following trigonometrical calculations; and many an instrument, such as the *dā'irat al-muᶜaddal*,[4] carry *miḥrābs*, presumably found by calculation, on a horizontal circle .

Naṣr b. ᶜAbdallāh's procedure is to draw the requisite diagram, which consists of arcs of great circles, directly on a hemisphere. This hemisphere, *ABGD*, which is bisected by each of the orthogonal circles *AEB* and *DEG*, is aligned so that *B* points towards North. If φ represents the geographical latitude of the place in question, ΔL the difference in longitude between the place and Mecca, and φ_M the latitude of Mecca, the remaining steps may be summarized thus (see fig. 1):

$BZ = \varphi$. *Z* is the north pole.
Draw equator GHD about pole Z.
$HT = \Delta L$.
Draw *LZTK*.
$TM = \varphi_M$. *M* is position of Mecca.
Draw *EMN*. *SN* gives the direction of Mecca.

To make these constructions on a hemisphere one would require two instruments for drawing great circles: compasses for drawing the circle when the pole

* Institute for the History of Arabic Science, Aleppo University. It is a pleasure to thank Dr. Saleh Omar, Col. Muḥammad ᶜAlī Khayyata, and Mr. Muḥammad Kamāl, of this Institute, for help at various times with the Arabic text given in this article.

1. Here and elsewhere the references are to the bibliography at the end of the paper.
2. *Ashkāl* f. 280r.
3. King, pp. 111-115.
4. Dizer; Janin & King, p. 217 and plate 10; Tekeli.

17/16 نقطة : إحدى نقطتي

17/17 مذكورين : مذكورتين // اخرتين : اخرين

17/90 الاخر : الاخرى

17/20 اولتين : اولين

21/22 جغراوفيا : جغرافيا ، أو : جاوغرافيا

22/2 اما ما على الارض : اما تعيين [تقويم ؟] ما على الارض

22/3 On the basis of the clearly observed distinction between *Kitāb* and *maqāla* in al-Bīrūnī's *Fihrist* and the reference to its subject here, the *maqāla* cited is to be identified with his – lost – *Maqāla fī taṣḥīḥ al-ṭūl wa-l-ʿarḍ li-masākin al-maʿmūr min al-arḍ* (*Chron.*, p. XXXXI, l. -3).

22/4 معرفة تولي : مقدرة تولي

22/6 منها : منهم

I have not been able to find either of the two verbs in the dictionaries although their meanings appear understandable enough in their derivation from the commonly attested forms of the two roots: "to find gross/obscene", and "to examine, scrutinize".

14/3-7 I would suggest the following translation:

> As for those who find it absurdly silly, they may dismiss it altogether and, in refuting its proponents, go to such lengths as to feign ignorance and to vent their anger at them. Such is the case with al-Farghānī. As for those who examine it critically, some believe that in the "melon-shaped" astrolabe, the sphere is imagined as flattened like a melon on one pole and split open toward the other, and others believe that this astrolabe and the aforementioned projection share no common features, but that it resembles those instruments which are designed for reading off ascendants and celestial altitudes, such as plane and other sundials.

14/8 "In relation to the opinions of these two groups mine represents a third." Al-Bīrūnī's attitude to the "melon-shaped" planispherium obviously had changed since *al-Istīʿāb*; here, in the *Tasṭīḥ*, he censures al-Farghānī for his babbling (*hadhayān*) and outright refusal even to consider its validity, while in his previous treatise, he had only mildly criticized his predecessor and even exonerated him on the basis of his and his peers' ignorance of Greek writings on conic sections and of the involved curves' exact construction. Moreover, the arguments al-Bīrūnī quotes here as those of the critics of the "melon-shaped" instrument, are (1) those of al-Farghānī as put forward in *al-Kāmil*, and (2) his own as witness *al-Istīʿāb* (see *Aufsätze* II 522-25). There arise the questions of why Abū l-Rayḥān's opinion had shifted – was it simply that he was quoting from his memory here? – and of why he levelled such attacks at al-Farghānī.

14/8 ff. This paragraph is a close repetition of what he had announced in *al-Istīʿāb* (Aufsätze II 524 center). Whether or not he ever composed the book he envisaged cannot be determined; he may have treated the subject in his *Takmīl ṣināʿat al-tasṭīḥ* (*Chron.*, p. XXXXVI, 1. - 4), but certainly not in *Tahdhīb Fuṣūl al-Farghānī* as Saʿīdān surmises in note 16.

14/13 تسطيح المبطح : التسطيح المبطخ

14/14 (cf. *Chron* p. 359, 1. 3 f.) الانقاد : الا بعاد

14/20 المبطح : المبطخ

14/21 التسطيح : التسطيح الاسطواني

17/11 and note 23: delete the reference and the note; al-Bīrūnī is here referring to pictorial representations of constellations, the outlines of which are to be determined by the locations of the respective stars.

13/11 جنوبي وشمالي : جنوبيّا وشماليّا

13/14 (الخطوط) : < القطوع >

13/22 قد نسه : قد نبه

13/23 f. Since writing *al-Istīʿāb*, Abū l-Rayḥān evidently came to know more manuscripts of al-Farghānī's *Kāmil*, for in the earlier book he only mentioned al-Farghānī's attribution of the "melon-shaped" astrolabe to al-Kindī whereas here, on the basis of a different transmission of *al-Kāmil*, he also refers to Khālid b. ʿAbd al-Malik al-Marwarrūdhī as a possible writer on the subject. In the absence of manuscript evidence for either al-Kindī or al-Marwarrūdhī, the respective merit of the two variants cannot at present be assessed. Al-Farghānī obviously belonged to the coterie of the Banū Mūsā (see Ibn abī Uṣaibiʿa, *al-ʿUyūn*, ed. Müller, Cairo 1299/1882, I 207, l. –6 ff.), who were engaged in a bitter feud with al-Kindī (*ibid.* and *Aufsätze* II 522-23); thus it would seem plausible that al-Farghānī also inveighed against him. Unfortunately, no corresponding title is transmitted among al-Kindī's writings so that it remains unknown whether he undertook a scholarly examination of this kind of astrolabe or simply based on it whatever astronomical operations and computations he performed. Of Khālid al-Marwarrūdhī's grandson, ʿUmar b. Muḥammad, Muḥammad b. Isḥāq al-Nadīm mentions a treatise on the plane *musaṭṭaḥ* astrolabe in *al-Fihrist* (tr. Dodge, New York 1970, vol. II, p. 656) while no such work by his grandfather is listed anywhere. It has to be borne in mind, however, that a rare and strange term like *mubaṭṭakh* might, by some copyist, have been "corrected" to *musaṭṭaḥ*. On the other hand, in the same *Fihrist*, there is a rather garbled reference to Khālid b. ʿAbd al-Malik among the makers of astronomical instruments (*ibid.*, p. 671); thus, it cannot be dismissed out of hand that he left a tract on the "melon-shaped" astrolabe as well – unless it were assumed that either in some of the manuscripts al-Bīrūnī knew of al-Farghānī's *Kāmil*, or in the transmission of the *Tasṭīḥ* itself, the names ʿUmar b. Muḥammad b. (Khālid) were dropped and so led to this confusion.

14/1 مبطحا : مبطخا

14/1 ووجد لحسن كتابا : ووجدنا لحبش كتابا

Here al-Bīrūnī mentions Ḥabash al-Ḥāsib's monograph on the "melon-shaped" astrolabe, about which, as we have seen, he studied and corresponded with Abū Naṣr; regrettably, it is not known at which time exactly this took place.

14/2 اما مستمجن واما مستمحن

it as late as 427 / (*Chron.*, p. XXXXVI, l. 14 ff.).[9]

Notes on the Text of at-Tasṭīḥ

In the case of emendations the faulty reading is given first (i. e. on the right) and, after a colon, the correction. References are by page and line of Saʿīdān's edition: e. g. 11/13 means page 11, line 13.

9 / – 5 — السدق : السذق

11/13 A whole *book* by al-Bīrūnī on the construction of a spherical instrument does not appear among his works as listed in his *Fihrist* nor does he cite it in any of the writings which have been accessible to me. The only titles from his works which come to mind are his "Discourse on the use of the spherical astrolabe" (*maqāla fī stiʿmāl al-asṭurlāb al-kurī*, *Chron.*, p. XXXXIII, l. 6) and a section in *al-Istīʿāb* on the construction of spherical astrolabes (*fī ṣanʿat al-asṭurlāb al-kurī dhī l-ʿankabūt wa-ghayrih*, Ahlwardt V 231a, l. -9), the first of which does not fit the topic, while neither meets the format of what al-Bīrūnī calls a *kitāb*, book. It has to be admitted, however, that the relationship of some of his preserved writings on instruments to the corresponding titles of his *Fihrist* still awaits examination.

12 / 1 — جغراوفيا : جغرافيا ، أو : جاوغرافيا

12 / 3 — افلاك انصاف النهار : المدارات الموازية لمعدل النهار

12 / 4 — المدارات الموازية لمعدل النهار : افلاك انصاف النهار

12/20 ff. In spite of al-Bīrūnī's formulation which seemingly implies the contrary, the books mentioned here did not necessarily have *samt al-qibla* in their titles; rather, the author may have meant that this subject formed part of their contents. As for Abū Naṣr b. ʿIrāq, this interpretation is lent special credence by what he himself named as the central topic of his *Kitāb as-sumūt*: to meet Abū'l-Rayḥān's request of proofs for computational methods for determining the azimuth of the *qibla* (*Risāla fī maʿrifat al-qusī al-falakīya*, in *Rasāʾil Abī Naṣr ... ilā l-Bīrūnī*, Hyderabad 1368 / 1948, p. 5, l. 6 ff.). Unfortunately, Abū Maḥmūd al-Khujandī's methods for tracing azimuthal circles on the astrolabe are not related to a specific book of his in Abū Naṣr's *Risāla fī majāzāt dawāʾir as-sumūt* (*ibid.*, pp. 3-9), nor is it known which book by Abū Saʿīd al-Sijzī al-Bīrūnī had in mind here.

13 / 7 — يمرّ : تمرّ

13 / 7 — بسيط : بسائط

9. In his discussion of the perfect – *kāmil* – astrolabe in *al-Istīʿāb* (s. *Aufsätze* II 532 ff.), Abū'l-Rayḥān stated that none of his predecessors had set forth the principles of its construction in his works. Thus he himself had pored over the problem for a long time before arriving at a convincing solution. It would seem odd indeed to assume that al-Bīrūnī had forgotten all of that when composing the last section of *Chron.*, on the rudiments of projection.

present treatise in terms which imply that it was the first work to be dedicated to Abū l-Ḥasan Khuwārizm-Shāh; together with his mention of exile, return and reception at court, this would seem to suggest that it was a *sadeh* festival soon after his return which offered him the opportunity to present, as it were, his credentials as a scholar. In al-Bīrūnī's time, *sadeh* was celebrated on 10 Bahmanmāh, which, according to the unintercalated Yazdagirdī calendar, placed it around 20 January. Since. as we have seen, al-Bīrūnī returned to Khwārezm between August 1003 and July 1004, the *sadeh* mentioned in the *Tasṭīḥ* can most probably be identified as either that of 20 January 1004 or that of 19 January 1005. Bringing tribute and gifts is not normally associated with the customs observed at *sadeh*, but rather with those of *nawrūz* and *mihrajān*; on the other hand, it may have formed part of the celebrations of all the ancient festivals. In the light of the *sadeh* traditions incorportated by Ferdowsī in the *Shāhnāmeh* and also of the results of modern scholarship, al-Bīrūnī is evidently right in attributing great age and Sasanian back-ground to this festival even though its actual origin – supporting the sun and other forces of life against the harshness of winter – had been forgotten in the literary tradition.[8]

Given the similarity of subject-matter in the *Tasṭīḥ* and in the concluding section of *Chron.*, it has more than once been attempted to fix the date of the *Tasṭīḥ* on the basis of a comparison between the two texts. We have seen above that the treatise under discussion here can be dated rather precisely by means of such historical and biographical data as are contained in the text itself. If additional evidence were wanted, however, that *Chron.* preceded *Tasṭīḥ*, it would be furnished by the sentence with which he introduced, in *Chron.*, the chapter on plane projection of the celestial and terrestrial globes: he had not come across any discussion which he could adduce and use as a basis of his own treatment (*wa-lam ajid li-aḥadin qawlan fī dhālika fa-aḥkiyahu*); instead, he was writing down what came to his mind and was asking the reader's forbearance. It would indeed be strange to assume that he had forgotten his own treatise on the subject and all the earlier books quoted there when he formulated that sentence. However, al-Bīrūnī's subsequent references, in *Chron.*, to his own *Kitāb al-Istiʿāb* and to Abū Ḥāmid al-Ṣāghānī raise the question of whether he simply meant that there was no comprehensive survey at hand which he could follow or whether this section of *Chron.* as it exists today is the result of later editing and revising as al-Bīrūnī envisaged

8. On the feast of *sadeh*, Arabicized as *sadhaq*, see Mary Boyce, *A History of Zoroastrianism*. Vol. I: *The Early Period* .Leiden/Cologne 1978 (*Handbuch der Orientalistik*. Erste Abt., VIII. Bd., 1. Abschn., Lfg. 2, Heft 2A), p. 175 ff. (with reff.,); numerous Arabic and Persian poems pay tribute to its observation in Islamic times.

(*Répertoire chronologique d'épigraphie arabe*, ed. Ét. Combe *et al.*, Cairo 1931-75, vol. VI, 91 f., no. 2169). The author also adhered, in the addresses to his benefactors, to rules of *inshā'* which stipulated that dignitaries and princes not be called by their given names but by appropriate titles and honorifics. Thus, in the text of *al-Maqālid*, he refers to Abū l-ʿAbbās Marzubān b. Rustam b. Sharwīn merely as al-Iṣfahbadh Jīljīlān Padashwārjarshāh and in *Chron.*, to Qābūs b. Wushmagīr as Shams al-Maʿālī (*Bīrūnīnāmeh*, pp. 461, 1. 10. 462, 1. 13. 504, 1. 3; not all of Abū l-ʿAbbās' titles are used every time. *Chron.*, p. 20, *s. v.* Shams-almaʿâlî). Most probably, the name (s) of the Khuwārizm-Shāh then reigning were included in the lost title of the *Tasṭīḥ* as were those of the Iṣfahbadh in the heading of *al-Maqālīd*. Al-Bīrūnī was not the only author among his contemporaries to use such a protocol of address to his dedicatee, as is shown, e.g., by Abū Manṣūr Muwaffaq b. ʿAlī al-Harawī in his *Ketābo l-abnīeh ʿan ḥaqāyeqo l-advīeh* (photographic reproduction of the ms, Codex Vindobonensis A. F. 340, as vol. XXXI of *Codices selecti*, Graz 1972; see fol. 2v, 11. 5-6).

Abū l-Rayḥān's reference to his long exile and final return to his homeland and to the warm welcome extended to him at the Khuwārizm-Shāh's court in the capital, i.e., al-Jurjānīya, provide valuable clues as to the date of composition of the *Tasṭīḥ*. In *al-Taḥdīd*, he briefly reports on going into hiding from domestic troubles in Khuwārizm in 385/995 and on his eventual flight (ed. Bulgakov, *RIMA* 8, 1962, p. 110, 11. 7-11). Unfortunately, he did not leave us a similar account of his return, but from the record of his observations of two lunar eclipses, one at Jurjān on Sunday, 13 Shawwāl 393/15 August 1003, and the other in the Khwārezmian capital al-Jurjānīya on Wednesday, 14 Ramaḍān 394/5 July 1004, it may be gathered that he returned to Khwārezm during the eleven months between these two dates (*al-Qānūn al-Masʿūdī*, ed . Hyderabad, II 741, 11. 16-19). Even if this were doubted, al-Bīrūnī entered the service of the then Khuwārizm-Shāh, Abū l-Ḥasan ʿAlī b. Ma'mūn well before the latter's death in 399/1009 since he named him in a list of his major benefactors between Qābūs b. Wushmagīr and Ma'mūn b. Ma'mūn Khuwārizm-Shāh (Yāqūt, *al-Irshād*, ed. Margoliouth, E. J. W. Gibb Memorial VI, 6, p. 312, 1. 11 = ed. Cairo XVII 187, 1. 5 f). In view of the fact that Abū l-Ḥasan ʿAlī only came to power in 387/997, the author's claim to have grown up in the 'protecting shade of his kingship' cannot be taken literally, especially given al-Bīrūnī's close ties to the previous, dispossessed dynasty, the Āl ʿIrāq, whose rule was ended by Abū ʿAlī's father in 385/995. Only in so far as the Maʾmūnids had been governors of al-Jurjānīya for a long time before that date is Abū l-Rayḥān's statement correct.[7] He alludes to his

7. On Khwarezmian history of this period see Clifford Edmund Bosworth in *EI*[2] IV 1065b-68b, *s. v.* Khwārazm-Shāhs, esp. p. 1066 (with reff.).

although Wiedemann and Frank more than sixty years ago thus established it on the basis of irrefutable textual evidence (*Aufsätze* II, 522. 524): al-Bīrūnī here alludes to *al-asṭurlāb al-mubaṭṭakh*, the "melon-shaped" planispherium in which the adjective refers to the shape of the *rete*, *al-ʿankabūt*, as it does in the other varieties, e. g., the *āsī*, *muṭabbal*, *zawraqī*, *lawlabī*, etc. In *al-Tafhīm*, Abū l-Rayḥān himself derives the term from *biṭṭīkh*, melon,[5] and as early as in *al-Istīʿāb*, he draws the parallel to a *tannūr*, a beehive-shaped oven, as al-Farghānī had done before him (*Aufsätze* II, 526. 529). In support of this reading, if it were needed, attention might be drawn to manuscript evidence such as that offered by Abū Saʿīd Aḥmad b. Muḥammad b. ʿAbd al-Jalīl al-Sijzī's autograph copy of Abū Jaʿfar Aḥmad b. ʿAbdallāh's *Kitāb Fī ṣanʿat al-asṭurlāb al-mubaṭṭakh*.[6] Abū l-Rayḥān does use *tabṭīkh* and *mubaṭṭakh* in a more general sense, that of 'flattened', in the title of his tract on projection, but in a way totally consonant with the rules of Arabic grammar. Judging by his usage in the *Fihrist*, which distinguishes between *kitāb* and *maqāla* according to length, it appears most likely that the title read *maqāla fī tasṭīḥ al-ṣuwar wa-tabṭīkh al-kuwar*, "Discourse on the plane projection of constellations and the 'melon-shape' projection of countries."

In addressing his dedicatee, al-Bīrūnī adopts a style closely resembling that which the Khuwārizm-Shāh Abū l-ʿAbbās Maʾmūn b. Maʾmūn employed in his foundation document of 401/1011; there the *shāh* is titled *al-amīr al-sayyid al-malik al-ʿādil abūʾl-ʿAbbās Maʾmūn b. Maʾmūn Khuwārizm-Shāh*

5. Ed. and tr. R. Ramsay Wright as *The Book of Instruction* ..., p. arab. facing p. 198, l. 8 f.:

ومنه صنف يسمى مبطخا مقنطراته ومنطقة بروجه ليست مستديرة لكنها كالبطيخ مفرطحة

In the Persian version, *ka-l-biṭṭīkh* is paralleled by *čūn kharbozeh* (ed. Jalāl Homāʾī, Tehran 1316-18 *h. sh.*, p.297, l.6). It will be noted that the meaning of 'flattening' is contained in the term *mubaṭṭakh*; thus, a change to *mubaṭṭaḥ* would be erroneous.

6. Paris, Bibliothèque nationale, ms arabe (de Slane) 2457 XXX (fols 141a-15ob, see Baron McGuckin de Slane, *Catalogue des manuscrits arabes*, Paris 1883-95 [Bibliothèque nationale. Département des manuscrits], pp. 43ob-34a, esp. 432b, no. 3o. Sezgin's remark that this part of al-Sijzī's famous collection was a copy from his manuscript [*GAS* VI 188] is not correct since the bulk of the manuscript is obviously in one hand.) In spite of the fact that al-Sijzī calls the author simply Abū Jaʿfar Aḥmad b. ʿAbdallāh, there can be no doubt that it is Ḥabash al-Ḥāsib who is meant here. (In the same manuscript, al-Sijzī calls Abū Jaʿfar al-Khāzin only Abū Jaʿfar Muḥammad b. al-Ḥusain, see *GAS* V 3o5-o7, esp. 306 f., nos. 1-3, and VI 189, note 1.) Ḥabash's treatise on the 'melon-shaped' astrolabe was well known and quoted by al-Sijzī himself in *Kitāb Fī ʿamal al-asṭurlāb* where he refrained from a discussion of its construction because of Ḥabash's exhaustive treatment in his book (Istanbul, Topkapı Saray, MS Ahmet III 3342, fol. 150b, ll. 3-7; thanks go to the direction of Topkapı Sarayı Müzesi for permission to consult the manuscript). Abū Naṣr b. ʿIrāq offers a proof for one of Ḥabash's constructions in it to al-Bīrūnī in *Risāla fī majāzāt dawāʾir al-sumūt fī l-asṭurlāb* (MS Bankipore 2468, fol. 81a, 14 f. = ed. Hyderabad, in *Rasāʾil Abī Naṣr ... ilā l-Bīrūnī*, Hyderabad 1368/1948, p. 12, l. 4 where the manuscript's clear *al-mubaṭṭakh* was "unaccountably changed to *al-musaṭṭaḥ*). Finally, al-Bīrūnī himself mentions Ḥabash's book in *-Tasṭīḥ* (see below). Richard P. Lorch's generous help in providing copies of the Paris and Bankipore manuscripts is gratefully acknowledged.

Kitāb Maqālīd ʿilm al-hay'a[1] and in *Kitāb fī stīʿāb al-wujūh al-mumkina fī ṣanʿat al-asṭurlāb*[2], to name just two of his works which are not too far removed in date from the treatise under discussion here.[3] Although neither manuscript of it so far known to exist[4] preserves such a title, it can safely be assumed to have once existed and to have closely resembled that of one or the other of the two aforementioned books. The two verses which introduce the Leiden manuscript appear suitable enough for a festive occasion such as the 'night of *sadeh*' to be considered authentic.

The title of the treatise as al-Bīrūnī entered it into his *Fihrist* (*Chron.*, p. XXXXIII, 1. 4), <*Maqāla*> *Fī tasṭīḥ al-ṣuwar wa-tabṭīkh al-kuwar*, has to this day been a source of doubt concerning the correct reading of *tabṭīkh*

List of abbreviations:

Ahlwardt. A., Wilhelm, *Die Handschriften-Verzeichnisse der Königlichen Bibliothek zu Berlin. Siebzehnter Band: Verzeichnis der arabischen Handschriften*, 10 vols (Berlin, 1887-99).

Aufsätze. Wiedemann, Eilhard, *Aufsätze zur arabischen Wissenschaftsgeschichte*, 2 vols (Hildesheim, New York, 1970) (*Collectanea* VI/1-2)

Bīrūnīnāmeh. Qorbānī, Abō l-Qāsem, *Bīrūnīnāmeh, taḥqīq dar āsār-e riāżī-ye Ostād Abū Rayḥān-e Bīrūnī* (Tehrān *s.d.* [1353 *h. sh.*]. *Selseleh-ye* (*Enteshārāt-e Anjoman-e Āsār-e Mellī*, 107)

Chron. Eduard Sachau, *Chronologie orientalischer Völker von Albīrūnī* Leipzig, 1876-78).

GAS. Sezgin, Fuat, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, 7 vols. to date (Leiden, 1867 ff.).

1. الحمد لله حق حمده وصلواته على محمّد نبيّه وعلى آله وأصحابه من بعده وسلّم تسليماً كثيراً وبعد فهذا كتاب محمد بن أحمد البيروني في استيعاب الوجوه الممكنة في صنعة الأسطرلاب الأنفس الصافية ذوات براع واشتياق إلى تصّور الموجودات ...

The dedication of the book, to Abū Sahl al-Masīḥī, is incorporated in the text itself and follows a few lines later (see Ahlwardt V 231, no. 5796, MS Sprenger 1869).

2. بسملة . كتاب مقاليد علم الهيئة ما يحدث في سطح بسيط الكرة عمله أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني للإصبهبذ الجيلجيلان فدشوارجرشاه أبي العباس مرزبان بن رستم بن شروين مولى أمير المؤمنين جبلت القلوب على حبّ من أحسن إليها ...

It will be noted that the dedicatee is named in the heading itself while a proper *ḥamdala* is missing (*Bīrūnīnāmeh*, p. 461, 1. 6 ff.).

3. On the basis of the quotation in *Chron.*, p. 357, 1. 20, *al-Istīʿāb* has, following Sachau, been dated before 390/1000, the year he indubitably established for the composition of *Chron.* (*ibid.* p. XXIV f.). Since, in its turn, *al-Maqālīd* is quoted in *al-Istīʿāb*, the sequence of the three works appears clear. But even without relying on *al-Istīʿāb*, it can be made plausible that *al-Maqālīd* preceded *Chron.*, as witness the author's testimony, in *Chron.*, to his personal acquaintance with the Iṣbahbadh Abū'l-ʿAbbās, the dedicatee of *al-Maqālīd* (*Chron.*, p. 209, 1. 7). As for a *terminus post quem*, al-Bīrūnī's references in *al-Maqālīd* to a previous dedication of a book to Shams al-Maʿālī Qābūs (i. e., of *al-Tajrīd*) and to his sojourn in al-Rayy evidently rule out the possibility that it was written before 385/995 when al-Bīrūnī presumably left his homeland Khwārezm to go into exile (see *Chron.*, p. 10, 1. 8 f.; *Bīrūnīnāmeh*, pp. 462, 1. -2. 497, 1. -7. 501, 1. -10; *Dictionary of Scientific Biography* II 147b-158a, *s. v.* al-Bīrūnī [E.S. Kennedy]; in her forthcoming study of *al-Maqālīd*, Marie Thérèse Debarnot will discuss its date in detail). If the dating of *al-Istīʿāb* is not to be questioned, it was composed in the span of the same five years, 385-90, as *al-Maqālīd* (this writer harbors some doubt as to whether or not the reference to *al-Istīʿāb* in *Chron.* might not be a later interpolation).

4. See *GAS* V 381, no. 10, and VI 272, no. 19; unfortunately, the study by Dānāseresht which Sezgin mentions has not been accessible to me. Saʿīdān's edition (University of Jordan, Amman, *Dirāsāt al-ʿulūm al-ṭabīʿiya* IV, 1 [1977], pp. 7-22) is based on the Leiden manuscript alone. For a study of the corresponding section in *Chron.*, see *Bīrūnīnāmeh*, pp. 249-67.

Here I am who grew up in the protecting shade of his kingship and was, after long exile, drawn to the pearl of his realm; in his august assembly–may God the most high increase it in excellence and eminence–I obtained of intimate company and friendliness, without title or merit, what made me surpass my peers and equals and what brought me near my goal and perfection. It is the duty of him who has been clothed in such garments to devote himself exclusively to the service of his patron and lord of his benefactions, secretly and openly, and to lavish the utmost of his ability and the extreme of his endeavor to render the dues of gratitude, even though his patron can dispense with them, but choosing what is preferable and holding fast to what is most suitable, by the way of reason.

The night of Sadhaq is one of the noble nights and magnificent feasts which the Khosroes held in veneration and during which they revived the customs of the ancient kings; on these and similar occasions the little man brings gifts to the great man, the one who is commanded propitiates the commander by demonstrating the sense of worship concealed in his heart. If it were possible, with body and soul, to win the grace of the august assembly, this would be of little moment in view of the incumbent duty, but the service rendered by scholarship is nobler than others and more exalted than all the rest; in this book I have thrown open the door of service through scholarship and lifted its veils; I have thereby smoothed the paths I will fittingly travel in whatever I take up as long as I live, donning the cloak of this noble service and seeking shelter under its shading protection; God is the giver of success and succor for that!

Commentary*

Unlike many of his contemporaries or later Islamic authors, Abū l-Rayḥān al-Bīrūnī did not usually include his own name or the title of the work he was writing in its introduction; instead, he often prefixed a brief separate title to the texts proper which contained such bibliographical information and the customary opening invocations. This was the style he adopted in his

* Warm thanks go to Edward S. Kennedy for suggesting that I undertake the foregoing translation as a supplement to Len Berggren's comprehensive study of the bulk of the text; I appreciate this opportunity for entering – admittedly only on the outlying reaches – hitherto unknown territory. I would also like to express my thanks to my colleagues at IHAS for lively and productive discussions and my appreciation of the research facilities found there. While preparing the notes presented here, I consulted Berggren's study, Suter's translation (in *Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern*, *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, Heft 4, Erlangen 1922, pp. 79-93) and Suter's and Wiedemann's "Über *alBirûnî* und seine Schriften" (*Aufsätze* II 474-515) in addition to the sources quoted below.

Al-Bīrūnī's *Maqāla Fī tasṭīḥ al-ṣuwar wa-tabṭīkh al-kuwar*: *A tranlation of the preface with notes and commentary*

Lutz Richter-Bernburg*

Translation of the Preface

By most excellent rule and mightiest victory,
By safest augury and most joyful circumstance;
By superlative bliss and most powerful kingship,
By felicitous duration and most cherished gift!

Gratitude for favors is a duty incumbent upon minds and intelligences without premeditation, and thereby the recipient of favors deserves the merit of increased benefaction. Thus it behooves me, at all times and in every situation, to illuminate the sign-posts of praise and encomium and to renew the ceremony of thanksgiving and invocation. All subjects have customs – in keeping them they uphold the rights of their masters and through them they express their convictions at their feasts and at the times of their joy and mirth, according to their situation and rank. And His Majesty, the commander, the lord, the just king, the patron of benefactions, the Khuwārizm-Shāh–may God the most high prolong his life in power and excellence and make last his might and eminence, may He give victory to his banner and standard, guard his kingdom and magnificence, support his authority and strengthen his rule and majesty, honor his grandsons and give power to his associates, may He subdue his enviers and forsake his ennemies – is the crown of kings in their entirety, whose days are the epoch of all days and whose presence is the origin of sublime and glorious qualities, the source of praiseworthy deeds and exploits, the refuge from the ruin of men from all quarters of the earth, with the wholesomeness of safety they have tasted there, the sweetness of justice, the loftiness of aspiration, overflowing generosity toward all, grace encompassing far and close, intimate company with savants and sages, their lodging in houses, their treatment with abundant generosity above merit and their rise from the depths to the clouds in the sky – may God guard his noble presence and preserve his inviolable, august threshold with His grace and boundless generosity!

*Seminar für Arabistik der Universität, Göttingen West Germany; 1980–81: IHAS, Aleppo.

البيروني
والمصوَّرات المستوية للكرة

ج . ل . برغرن

في اواخر القرن الرابع للهجرة كتب أبو الريحان البيروني « كتاب تسطيح الصور وتبطيح الكور » يصف فيه بعض التطبيقات الجديدة لتصوير الكرة على السطح المستوي المكتشف منذ كتب بطليموس « الجغرافيا » قبل عشرة قرون خلت . وفي عام ١٩٢٢ نشر هـ . سوتر ترجمة ألمانية لكتاب البيروني آنف الذكر مع تعليق موجز ، ثم بعد خمسة وخمسين عاماً نشر أ . سعيدان النص العربي محققاً معتمداً مخطوطة لايدن ١٠٦٨ رقم ١٥ . إضافة إلى ذلك هناك ترجمة روسية وأخرى أزبكية كما يو جد ملخص ودراسة فارسية أشار إليها جميعاً ف. سزكين . إن أغلبية المادة العلمية في كتاب تسطيح الصور ظهرت كذلك في آخر كتاب البيروني « الآثار الباقية من القرون الخالية » وقد شكل هـذا مصدراً أفاد منه M. Fiorini في دراسته التاريخية القيمة عن تاريخ علم الخرائط والمصورات المبكر في أوربا .

برغم كل هذه الأعمال لا نعرف لكتاب تسطيح الصور دراسة كاملة لذا توخينا في بحثنا تلافي هذه الثغرة ، وقدمنا فيه ثبتاً وترجمـة انكليزية لكامل الرسالة مهملين صفحة الاهداء الى خوارزمشاه الذي تكلمنا عنه فيما بعد (انظر مقالنا بالانكليزية) . نبدأ بخلاصة وجيزة عن رسالة البيروني ، ونرجـع القارىء في ترجمتنا الى نص سعيدان مشيرين الى رقم الصفحة ثم السطر .

١ — ملخص

١٠ : ٦ — ١٠ : ٢٩. يستعرض البيروني الفائدة والمنفعة من معرفة صورالكواكب وهيئتها في علم الفلك وفي التنجيم وفي علم المناخ والزراعة ، ومن معرفة وضع الأشياء في سطح الأرض ومسامتة مواضع بعضها لبعض من أجل الرحالة والمسافرين والمصلين والحملات العسكرية .

١١ : ١ – ١١ : ١١ . الكتب هي الدليل المألوف لمريدي معرفة هيئة الكواكب وأشكالها، لكن عند تواتر النسخ وكثرة النقل لا تبقى الصور المصورة في تلك الكتب مضبوطة على حالها بل يصيبها كثير من الخلل والتشويه .

١١ : ١١ – ١١ : ١٧ . يمكن نقل صورة الكواكب الى الكرة بضبط واحكام إلا أن العمل في الكرة الصغيرة صعب في حين ان انتقال الكرة الكبيرة أو حملها من مكانها صعب كذلك .

١١ : ١٨ – ١٣ : ٣ . أما إذا نقلت المصورات في السطوح الكروية الى سطح مستو فإن من السهل انتقالها لكن من الصعب محاكاتها . يصف البيروني ما جاء في ذلك عند مارينوس ، بحسب ما رواه بطليموس ، وعند البتاني في سمت القبلة ناقداً إياهما بعدم الدقة وقلة الضبط .

١٣ : ٤ – ١٥ : ١٥ . يستعرض البيروني ما كتب في هذا المجال مناقشاً طرق الاسقاط المخروطي والاسقاط المبطخ عند الكندي أو المروروذي والاسقاط الاسطواني والاسقاط اللارياضي عند الصوفي (لمزيد من التفصيل انظر مقالنا بالانكليزية Sec - 4) . نظراً للنقص في تلك الاسقاطات جميعاً « وجب علينا ان نحتال لها حيلاً نقرب بها الأمر » بين السطح المستوي وبين السطح الكروي، ومع ذلك فإن امتناع وجود النسبة المنطقة بين الخط المستقيم وبين المنحني يحول بيننا وبين التصوير المطابق للأصل على نحو كامل .

١٥ : ١٦ – ١٨ : ٥ . يصف البيروني طريقته الأولى في التصوير كالتالي (انظر مقالنا بالانكليزية Fig. 1) : لندع القطرين AG و BD يربعان الدائرة E ولنقسم كل ربع من أرباع الدائرة الأربعة الى ٩٠ جزءاً متساوياً ولنفعل ذلك أيضاً في أنصاف قطريها الأربعة . فإذا كان AH يمثل جزءاً واحداً من أجزاء AE التسعين فإن القوس الدائرية الواصلة بين B و H و D تمثل نصف دائرة الطول . كذلك إذا كان كل من القوسين AM و GS يمثل جزءاً واحداً من أجزاء محيط الدائرة التسعين و EN جزءاً واحداً من أجزاء نصف القطر التسعين فإن القوس الدائرية الواصلة بين S و N و M تمثل نصف دائرة العرض . وهكذا تمثل باقي أنصاف دوائر الطول ودوائر العرض . ثم يقدم مثالين على كيفية تصوير كوكب معلوم الإحداثيات في هذه الخريطة . ويرشد القارىء الى تحضير خريطة أخرى لنصف الكرة الآخر ، ويدله على كيفية تلوين الخريطتين .

١٨ : ٦ – ١٩ : ٢٢ . هنا يشرح البيروني للصناع الذين يفضلون الحساب على طرق الانشاء الهندسي كيفية حساب أنصاف أقطار دوائر الطول ، وابعاد مراكزها عن E مركز الدائرة المعلومة ، وما يسميه هو **المجاز** . وهي على التوالي ZT ، ZE والقوس AH في الشكلين (Figs. 2 , 3) (من أجل دوائر الطول) . كما يشرح كيفية حساب ZT و EZ بطريقة مكافئة في تقويم العلاقة : $2\,ZT = TE + (8100/TE)$ والعلاقة : $EZ = (8100/2\,TE) - TE/2 = EZ$ أما حساب القوس AH فيكون بطريقة مكافئة في تقويم العبارة الجبرية : قوس جب $(40' \cdot ZH \cdot 90/TZ)$. وتقاس AR باتجاه B عندما تكون Z خارج الدائرة المعلومة (Fig. 2) وباتجاه D عندما تكون Z في داخلها (Fig. 3) .

١٩ : ٢٣ – ٢٠ : ٢٠ . ويحسب البيروني هنا الكميات نفسها كما وردت أعلاه من أجل دوائر العرض (Fig. 4) . لحساب ZT يحسب البيروني أولاً : $SE = (3/2)\,\text{Sin}\,\widehat{AM}$ عندئذ $TS = SE - TE$ ، ومن ثم $SZ + ZT = MS^2/TS$ (حيث $MS = 3/2\ \text{Sin}\ \widehat{DM}$) . وأخيراً يحسب TZ من العلاقة المحققة : $TZ = TS / 2 + (SZ + TZ) /2$ عندئذ تكون المسافة بين المركزين: $EZ = ET + TZ$. أما حسابه للمجاز $\widehat{HD}$ من أجل دوائر العرض فبنفس طريقة حسابه للمجاز $\widehat{AH}$ من أجل دوائر الطول . ثم يختم هذا الباب مبيناً أن مراكز دوائر العرض تمتد دائماً الى خارج الدائرة المعلومة وذلك بتبيانه أن الوتر DM أعظم من DT: مما يحتّم أنه لا يمكن لدائرة مركزها في D أن تمر من M و T معاً كما أنه لا يمكن أيضاً لدائرة يقع مركزها بين D و E أن تمر من M و T .

٢١ : ١ – ٢١ : ١١ . طريقة ثانية لتصوير السطوح الكروية على السطح المستوي تحصل عندما يكون البعد بين كوكبين ثابتين في الكرة هو نفس البعد بين صورتيهما في السطح المستوي ويكون بعد أي كوكب ثالث في الكرة عن الكوكبين الثابتين فيها بعداً واحداً وهو نفس بعد صورته في السطح المستوي عن صورتيهما فيه . تقاس الابعاد في الكرة بحلقة من حلق الكرة العظام وتقاس في السطح المستوي بمسطرة مقسمة الى ١٨٠ جزءاً .

٢١ : ١٢ – ٢١ : ١٧ . طريقة ثالثة وهي أن يستعمل الطلاء على الكرة في مواضع الكواكب ومن ثم تدحرج الكرة بحركة دورانية على السطح المستوي المقصود التصوير عليه على طول الدوائر الكبرى مارة بنقطة ثابتة في الكرة، وهكذا تنقل صور الكواكب على السطح المستوي.

٢١ : ١٨ – ٢٢ : ١٠ . يوصي البيروني القارىء بالرجوع الى جداول الكواكب الثابتة والى كتاب « الجغرافيا » للحصول على المعلومات التي يحتاجها في كل من صورة الكواكب وصـــورة الأرض . والقارىء الذي تعوزه مثل هذه المعلومات ولا يجدها في الكتب يحتاج إلى ايجادها بنفسه كأن يستعمل ذات الحلق وغيرها من الآلات الراصدة المهيأة لذلك وأن يتبع الطريق المنهجية في تحديد أطوال الأماكن وعروضها مما يتطلب عمراً مديداً ونفوذاً واسعاً في أرجاء المعمورة وهذا متعذر لذا يجب الاقتصار عـــلى معرفة أعمال الأوائل وتصحيحها قدر المستطاع .

٢٢ : ١٠ – ٢٢ : ١٥ . خاتمة الرسالة وفيها تحذير القارىء من الطلب المفرط في بلوغ الكل ، ثم دعاء الختام .

٢ – بعض الشرح والتعليق

العنوان « ... وتبطيح الكور » . يقترح ڤيديمان وفرانك أن نقرأ «تبطيخ» بدلاً من «تبطيح» ، وبديهي أنهما اعتمدا مرجعاً الأسطرلاب المبطخ الذي ورد ذكره في الرسالة . لكن لا يوجد دليل نصيّ يفيد بهذه القراءة لذا نفضل أن نقرأه كما قرأه سعيدان تماماً كما ينبغي أي « تبطيح » .

١٠ : ٩ **هيئة الأفلاك** – الأفلاك هي الكرات السماوية الثماني المتحدة المركز التي تحتوي الكواكب السيارة السبعة والكواكب الثابتة ، مع الأرض في المركز .

١٠ : ١٦ – ١٧ **في المواليد وتحاويلها ، وتحاويل سني العالم .** يشرح البيروني هذه الجملة في « كتاب التفهيم لأوائل صناعة التنجيم » حيث يكتب : ١ – السنة هي عودة الشمس الى المكان الذي كانت فيه في البدء . ٢ – سنة العالم هي عودة الشمس إلى أول الحمل . ٣ – سنة المواليد هي عودة الشمس الى موضعها في زمن الولادة . ويخلص الى القول : « ويحتاج إلى معرفة ذلك ليستخرج به الطالع فيكون طالع تحويل تلك السنة » .

١١ : ٤ في « كتاب التفهيم » يعرف البيروني نوء النجم بأنه شروقه الشمسي : ويشرح في « الآثار الباقية » النوء بأنه كذلك شروق (طلوع) المنزلة (منزلة القمر) ويسمى تأثير الطلوع **بارحاً** بينما يسمى تأثير السقوط (الغروب) **نوءاً** أيضاً . وجمع نوء أنواء . في مكان آخر من « الآثار الباقية » يشير البيروني الى كافة الحوادث السنوية المتعاقبة وكذلك

الى الخاصة الارصادية وغيرها من خواص الأيام المفردة التي علمتهم (اليونانيين والسوريين) إياها التجربة والخبرة عبر القرون الطويلة ، وهم يسمونها **انواءاً وبوارح** . كما يشير إلى رأي أول بادر به ثابت بن قرة وهو أن الأنواء تحدث في يوم واحد هو نفس اليوم في كل مكان ومن ثم لا يمكن اتصالها بشروق النجوم (الشمسي) أو بأفولها .

١٢ : ١ **عن مارينوس** . يشير سعيدان إلى أن النص العربي في الأصل يقرأ « فاريبوس » لكن تعديله إلى « مارينوس » أكيد ، (أما قراءة سوتر له بـ « ابارقوس » فهي خطأ) ذلك على ضوء نص بطليموس الذي نسب التطبيق فعلاً الى مارينوس .

١٢ : ٢ — ٥ نقرأ في طبعة سعيدان : **من تخطيط خطوط موازية لخط الاعتدال واقامتها مقام دوائر العرض ، أعني أفلاك أنصاف النهار ، وتخطيط خطوط موازية لخط نصف النهار** (في الأصل لخط الاعتدال) **واقامتها مقام دوائر الطول ، أعني المدارات الموازية لمعدل النهار** . حيث يوضح سعيدان في الحاشية (١٠) أنه استبدل في النص عبارة « لخط الاعتدال » بعبارة « لخط نصف النهار » ؛ لكن حتى بعد تصحيح سعيدان لا يمكن أن يكون هذا ما كتبه البيروني إذ لا يستقيم به المعنى . ولكن إذا أخذنا بتصحيح سعيدان وافترضنا أن عين الناسخ بدلت مكاني الجملتين التفسيريتين المبتدئتين بلفظة « أعني » في السطرين ٣ و ٤ عندها يستقيم المعنى . وبرغم ذلك هناك مجال لتعديلات أخرى ممكنة .

١٢ : ٦ — ٨ لتجنب افتراض أن النص محرف في هذه الأسطر علينا أن نفهم **الطول الكلي** بأنه مجمل طول الخريطة من الشرق الى الغرب ، **والعروض** بانها الخطوط التي تقيس عرض الخريطة المستطيلة الشكل من الشمال إلى الجنوب .

١٢ : ١٨ — ١٩ **فاستخرج به حينئذٍ مقدار بعد سمته** . ترجم سوتر هذه العبارة كالتالي:

(auch noch die Entfernung Von Mekka bis zum Beobachtungsort)

(الى جانب ذلك أيضاً البعد من مكة الى مركز الرصد) . وهذا خطأ نظراً لكونه لاينطبق مع ما فعله البتاني ولا يعبر عما أراده البيروني هنا .

١٣ : ٧ **مجسمات ناقصة** . إن ترجمة سوتر وشرحه ممكنان .

« Unvollkommener Körper (d. h. deren Grundflächen nicht Kegelshnitte, sondern unclassifizierte Kurven sind) »

(جسم غير كامل، أي أن الأسطح الأساسية ليست قطوعاً مخروطية بل هي بلا شك منحنيات غير منتظمة) . فمن الصعب التأكد مما قصده البيروني بلفظة « ناقصة » خاصة وأن العبارة لايتكرر ورودها كما أن أحد استعمالاتها هو في وصف « القطع الناقص » . وهكذا إذاً فليس بمقدورنا التأكد من أي الاسقاطات اعتمد البيروني هنا .

١٣ : ٢٣ — ١٤ : ١ **اسطرلاباً مبطحاً** . فضلنا مع سوتر هذه القراءة على تلك التي اختارها سعيدان « مبطحاً » . إلا أن سوتر لم يذكر أن البيروني استعمل هذا اللفظ بالذات في «كتاب التفهيم » : « ومنه (الأسطرلاب) صنف يسمى مبطحاً مقنطراته ومنطقة بروجه ليست مستديرة لكنها كالبطيخ مفرطحة . »

١٤ : ١ إن تبديل سعيدان لعبارة **ووجد لحسن** في الأصل بعبارة « ووجدنا له » يبدو لا مبرر له .

١٤ : ١ — ٢ **وأصحاب هذه الصناعة فيه فريقان : إما مستمجن وإما مستمحِن إياه .** قرأ سوتر اللفظتين كالتالي : « مستمجَن ومستمحَن » واعتبرهما تشيران إلى نموذجين للاسطرلاب لأنه فهم معنى جذر الكلمة (المجرد الثلاثي) مجَنَ بأنه « غلُظ وصلُب » مشيراً إلى أنه استناداً إلى المعاجم والقواميس ليس لهذا الجذر صيغة عاشرة (أوزان المزيد) . أما نحن فنفضل أن نأخذ معنى فعل مجَنَ « هزِىء وسخِر » ، وبذلك نقول إن هاتين اللفظين تشيران إلى موقف كل من الفريقين المذكورين .

١٤ : ١٢ **تسطيح المبطخ** . فضلنا هنا قراءة سوتر « مبطخ » على قراءة سعيدان « مبطح » وذلك لاعتراض البيروني على هذا الاسقاط لأنه يقطع الدائرة الكسوفية (فلك البروج) إلى نصفين ، وهذا الاعتراض يلائم كل الملاءمة الأسطرلاب ذا الشكل البطيخي كما وصفه ڤيديمان وفرانك .

١٤ : ١٣ **لاتساع الأبعاد** . باستبدالنا لفظة « انفاد » في النص المطبوع بلفظة « أبعاد » تبنينا اقتراحاً قدمه لوتس ريشتر — برنبورغ .

١٤ : ١٩ **الاسطرلاب المبطخ** . نظراً لملاحظة البيروني فيما تقدم حول الفرغاني والاسطرلاب ذي الشكل البطيخي نفضل هنا قراءة سوتر « المبطخ » على قراءة سعيدان « المبطح » .

١٦ : ٤ **نطلب** . في أغلب الأحيان كنا نقرأ الأفعال بصيغة جمع المتكلم ، ونرى ذلك أفضل من قراءتها بصيغة المفرد المخاطب أو المبني للمجهول .

١٧ : ٥ **وهو مائة وسبعة درجة** . أوردها سعيدان بين حاصرتين أي أنها إضافة من عند الناسخ ، وهذا خطأ في جميع الأحوال ، والقراءة الصحيحة هي : « مائة وتسع وسبعون درجة » .

٢١ : ٥ **حرف حلقة من حلق الكرة العظام** . لا يمكن للنص أن يحتمل ترجمة سوتر :

« . . . daß du an je zwei der sterne ein biegsames lineal (einen Papierstreifen) anlegst, das sich also an einen Großkreis der Kugel anschmiegen kann . . . »

[... وذلك بأن تضع على كل كوكبين مسطرة قابلة للثني والانحناء (قصاصة ورق) بحيث يمكن أن تلتصق المسطرة على دائرة (حلقة) عظيمة للكرة ...] مع أن هذه الترجمة أي الطريقة التي وصفها سوتر قد تكون مناسبة لتنفيذ ما يطلبه البيروني .

٢١ : ١٦ — ١٧ **إلا ما بين مثبتي الجزء الذي لا يتجزأ وبين نفاته** . نستنتج من سياق النص مضمون هذه العبارة وهو ان الانحراف ما بين تصور البيروني للكرة كما جاء في طريقته الثالثة وبين الكرة « الحقيقية » هو انحراف طفيف الى درجة انه لا نفع في الفرق بينهما الا من الوجهة النظرية وليس له من أهمية عملية بأكبر من النتيجة التي نخلص اليها من حيث وجود اجزاء تتجزأ او لا تتجزأ .

٣ — الأعلام

نعدد أسماء الأعلام كما أوردها البيروني في الرسالة مضيفين بين قوسين الجزء من الاسم غير المذكور فيها ، ثم يلي الاسم رقم الصفحة الوارد فيها في طبعة سعيدان ورقم السطر بين قوسين أيضاً . وأخيراً التاريخ الميلادي إذا كان معروفاً . مزيد من التفصيل يجده القارىء عند سزكين (انظر الحاشية ٢٨ من مقالنا بالانكليزية) . عطارد بن محمد (الحاسب) ، (١١ : ٣) . (أبو حفص) عمر بن الفرخان الطبري (١١ : ٣) ، (أواخر القرن الثامن) . أبو الحسين (عبد الرحمن بن عمر بن محمد بن سهل) الصوفي (١١ : ٤ ، ١٥ : ١ — ٢ ، ١٥ : ٥ ، ٢١ : ٢٠) ، (٩٠٣ — ٩٨٦) . (كلوديوس) بطليموس (١١ : ٢٠ ، وربما ٢١ : ٢٢) ، (ازدهر ١٣٥) . مارينوس (الصوري) ، (١٢ : ١) (ازدهر ١١٠) ، (أبو عبد الله) محمد بن جابر (بن سنان) البتاني ، (١٢ : ١١ ،

٢١ : ٢١) ، (توفي ٩٢٩) . أبو سعيد أحمد بن محمد بن عبد الجليل (السجزي) ، (١٢ : ١٢ ، ١٥ : ١) ، (توفي ١٠٢٤) . أبو (نصر) منصور علي بن عراق ، (١٢ : ٢١ — ٢٢) ، (توفي بين ١٠١٨ و ١٠٣٦) . أبو محمود حامد بن الخضر الخجندي ، (١٢ : ٢٢) ، (ازدهر في النصف الثاني من القرن العاشر) . أبو العباس (أحمد بن محمد ابن كثير) الفرغاني ، (١٣ : ٢١ — ٢٢ ؛ ١٤ : ٤ ، ١٤ : ١٩)، (ازدهر في الثلث الثاني من القرن التاسع) . (أبو يوسف) يعقوب بن اسحق (بن الصباح) الكندي ، (١٣ : ٢٢) ، (توفي بعد عام ٨٧٠ بقليل) . (عمر بن محمد بن) خالد المروروذي ، (١٣ : ٢٣) ، (ازدهر في النصف الثاني من القرن التاسع) . حسن (١٤ : ١) غير معروف من قبلنا .

٤ — التطبيقات الواردة في نص الرسالة .

نذكر فيما يلي كل اسقاط (تسطيح) اورده البيروني في كتاب تسطيح الصور محققين وصفه حسبما جاء في الكتاب ومحددين مكان وروده في النص :

١ — اسقاط مارينوس . ١١ : ٢٠ — ١٢ : ١٠

٢ — الاسقاطات المخروطية . حيث تسقط الخطوط المستقيمة من خلال نقطة على قطر الكرة (ربما على امتداده) نقاطاً في الكرة على السطح المستوي . ١٣ : ٨ — ١٣ : ٢٠

٣ — الاسقاط المبطخ . في هذا الاسقاط تشع خطوط الزوال خطوطاً مستقيمة متساوية البعد عن القطب ، وتمثل موازيات العرض بدوائر متساوية البعد تتحد مراكزها في القطب ١٣ : ٢١ — ١٤ : ١٧ .

٤ — الاسقاط الاسطواني . وفيه تسقط الخطوط المتعامدة نقاطاً في الكرة على سطح أية دائرة عظيمة . ويسمى هذا التسطيح الاسقاط المتعامد . ١٤ : ١٨ — ١٤ : ٢٦ .

٥ — تنقل الكواكب في الكرة على قطعة ورق رقيق تلف حول الكرة ثم تنزع عنها فتعطي الخريطة المطلوبة . إن أقرب طريقة تسطيح حديثة تكافىء هذه الطريقة اللا رياضية ، هي طريقة الاسقاط متعدد المخروطات . ١٥ : ١ — ١٥ :

٦ — وصف البيروني لهذا الاسقاط هو هدفه الرئيسي في رسالة التسطيح هذه . حيث تمثل خطوط الزوال والموازيات بأقواس دائرية . يشير **Deetz** و **Adams** إلى أن هذا التسطيح المسمى بالكروي إنما يستعمل في تصوير أنصاف الكرات ، ومع ذلك فلا شيء

صحيح سوى تدريج الدائرة الخارجية وتدريج القطرين واتجاههما أيضاً ؛ ولا يمكن قياس المسافات ولا الاتجاهات ولا يمكن حتى رسمها بيانياً وتحديد مواقعها على الخريطة سنسهب في شرح ذلك في فقرة لاحقة . ١٥ : ١٦ — ٢٠ : ٢٠ .

٧ — الاسقاط عن طريق بعديْ الدائرة العظيمة عن نقطتين ثابتتين . ٢١ : ١ — ٢١ : ١١ .

٨ — الاسقاط بدحرجة الكرة من جميع نواحيها على مستوٍ مماس من خلال نقطة ثابتة . كالاسقاط (٣) غير أن نقطة كيفية هنا تحل محل القطب في (٣) ، ٢١ : ١٢ — ٢١ : ١٧ . يلفت انتباهنا ا. س . كندي إلى أن الخطوط التي تصور خطوط الزوال والموازيات في هذا الاسقاط قريبة جداً من الأقواس الدائرية التي استعملها البيروني لنفس الغرض في الاسقاط (٦) . وبالتالي ، ليكن م طول $\vec{م}$ الشعاع المتجه من مركز الخريطة إلى منحنيات العرض أو الطول مساوياً ٤٥° ، حيث يشكل $\vec{م}$ مع خط الزوال المركزي زاوية قدرها ٣٠° . في الجدول التالي يعطينا كندي النتائج حيث يستعمل ١ في الحسابات من أجل شعاع عموم الخريطة .

	اسقاط كروي	اسقاط مدحرج	الفرق المئوي ٪
٤٥° موازٍ	م = ٠,٦٢٠	م = ٠,٦٠٨	٢,٠
٤٥° خط الزوال	م = ٠,٦٩٣	م = ٠,٧٠٤	— ١,٧

النتائج

إذا ما أهملنا الاسقاط اللارياضي (٥) فإننا نستخلص أن البيروني كانت في حوزته في النهاية سبعة تطبيقات لتسطيح الكرة ، وكلها تقبل وصفاً رياضياً صحيحاً . وأن أحد هذه التطبيقات وهو الاسقاط (٢) يقبل عدداً لامتناهياً من التغيرات . إضافة إلى ذلك ، كما سوف نناقشه فيما بعد ، فقد عرف البيروني التطبيقات الثلاثة التي وصفها بطليموس في « الجغرافيا » أي التصويرين المخروطيين وتصوير المنظور . مما أعطى بالنتيجة حصيلة بعشرة تطبيقات واسعة التنوع مختلفة الخواص زودت الجغرافيين المسلمين — ومصوريْ الخرائط بخاصة — بمادة غنية كفتهم قروناً تبعت . إن معرفة مدى ما تم من الاستفادة الفعلية من هذه المادة المخزونة والجاهزة منوطة بمراقبة ما تبقى من خرائط في دور المخطوطات

وبيوتاتها في العالم [بخصوص بعض مصادر هـــذه الخرائط ، انظر ڤيديمان (الفقرة ٣٣ من المراجع في مقالنا بالانكليزية) ١ ، ص ٦٧] ، وبدراسة اسقاطاتهـــا (تصاويرها) التي يوحي ظاهرها بأنها إنشاءات ارتكزت على أساس علمي . مثل هذه الدراسة كفيل بالإجابة على جميع التساؤلات المطروحة حول أثر رسالة البيروني هذه ومدى تأثيرها ، وبالكشف عن العلاقة القائمة بين ما هو نظري وبين التطبيق العملي في العلوم العربية في العصر الوسيط .

٥ – شروح إضافية

بما أن مقدمة الرسالة ذكرت خوارزمشاه دون ذكر اسمه فقد ارجعه سوتر إلى أبي العباس مأمون الذي كان شيخ البيروني (معلمه) ما بين ١٠٠٤ و ١٠١٧ ، في حين اعتبر روز نفلد وآخرون تاريخ الرسالة في ٩٩٥ م وبذلك أرجعوا خوارزمشاه الى الشخص الذي كان شيخ البيروني لغاية تلك السنة .

من ناحية ثانية ، يبين البيروني في كتاب « الآثار الباقية » الذي ألفه حوالي سنة ١٠٠٠ ميلادية أنه لا يعرف بالتحديد أية رسالة خاصة بالموضوع (تسطيح صور الكواكب). وأن يكون قـــد نسي في سن السابعة والعشرين رسالة كتبها في سن الثانية والعشرين فهذا لا يمكن أن يعني سوى أنه لم يكن قد كتب بعد رسالته هذه حين كان يكتب « الآثار الباقية». وهكذا فإن سوتر محق في قوله إن خوارزمشاه يرجع إلى أبي العباس مأمون . وبالتالي يبدو أن مادة الرسالة (موضوعها) كانت في متناول يد البيروني في « الآثار الباقية » لذلك أمكنه إضافة تطبيقين جديدين إليها : (٧ و ٨) من الاسقاطات التي ذكرناها أعلاه ، ليصوغ فيما بعد عام ١٠٠٤ بقليل رسالة جديدة يهديها إلى شيخه الجديد .

سنناقش فيما بقي النقاط التي اعترضتنا في نص رسالة « تسطيح الصور » محاولين الاستناد إلى المقارنة بين نصها الحالي وبين الفصل القريب إليها من كتاب « الآثار الباقية ».

١٣ : ٤ – ١٥ : ١٠ . إن الاختلافات الرئيسية بين معالجة مختلف الاسقاطات المعطاة هنا وبين المعالجة التي وردت في « الآثار الباقية » هي : ١ – تعطي الدراسة في « الآثار الباقية » وصفاً دقيقاً للاسقاطين الاسطواني والمبطخ (مع ذلك لم تستعمل كلمة « مبطخ ») في حين أن الرسالة تعطيهما بالدرجة الأولى وصفاً بلغة علتهما وتفيض في تاريخ المبطخ . ٢ – يذكر البيروني في « الآثار الباقية » العالم أبا حامد الصغاني (القرن العاشر الميلادي)

على أنـــه كتب في تسطيح الكرة من نقطة تقع في المحور وليس في القطب ، ويجيء وصف ذلك أيضاً في الرسالة (١٣ : ١٠ – ١٣) . ٣ – يتكلم البيروني في «الآثار الباقية» عن الاسقاط الاسطواني قائلاً « ... ولم يتصل بي أن أحداً من أصحاب هذه الصناعة ذكره قبلي » . في حين أنه في رسالته يذكر الفرغاني بشكل صريح (١٤ : ١٩) عندما يقول : « وأما التسطيح الاسطواني فهو الذي خطر ببالي من كثرة ما أفاض فيه الفرغاني من الهذيان في آخر كتابه ... » .

١٨ : ٦ – ٩ . استناداً إلى **Luckey** فإن الماهاني يضيف إلى الطريقة البيانية (الصناعية) التي قدمها لحل معضلتين من معضلاته حلاً حسابياً استهله بعبارة « باب ذلك من الحساب » ، و كما هو معلوم في كتابه « الصناعة الفلكية » (**The Analemma**) يقرر بطليموس الطريقة الحسابية المتطابقة جنباً الى جنب مع الطريقة الانشائية (الصناعية) . إن مثل هذه الطريقة الحسابية للخريطة لا بد أن تحتوي بعض المنفعة . فإن إنشاء مراكز دوائر الطول أو العرض بدرجات دنيا بواسطة المسطرة والبركار قد لا يؤدي الصورة المطلوبة وتصبح الدقة في مثل هذه الحالة مشكلة حقيقية .

١٨ : ١٠ – ١٨ (انظر مقالنا بالانكليزية **Fig. 2**) لتكن الدائرة المعلومة **ABGD** نصف قطرها ٩٠ = **EB** ولتكن دائرة الطول **DTB** حيث $\lambda = TE$ ($\therefore < \lambda <$ ٩٠) والمطلوب ايجاد **TZ** (نصف قطر دائرة الطول التي نرمز إليها بـ **R**) و **EZ** ، البعد بين مركز الدائرة المعلومة ومركز دائرة الطول. إن الوتر **BD** في دائرة الطول عمودي على القطر في **E** ويقسمه إلى جزئين λ و $R + EZ$. إذاً $2\,B^2 = \lambda\,(EZ + R)$ وكذلك $8100/\lambda = EZ + R$ حيث $\lambda - R = EZ$ إذ بإضافة λ إلى حاصل القسمة ينتج $8100/\lambda + \lambda = 2\,R$. وهكذا $R = 8100/2\,\lambda + \lambda/2$ مع أن هذا لم تذكره الرسالة وانما ذكر فقط في« الآثار الباقية» . وكذلك بطرح λ ينتج $EZ = \lambda/2 - 8100/2\,\lambda$ البعد بين مركزي الدائرة المعلومة ودائرة الطول λ . مع أن البيروني يقرر في « الآثار الباقية » أن بإمكاننا الاستغناء عن معرفة البعد بين المركزين .

١٩ : ١ – ١٧ . ويهتم البيروني ، على سبيل الافتراض ، بتحديد القوس **AH** لأن الخط الواصل بين **B** و **H** سيقطع حينئذ **EA** (أو امتداده إذا لزم) في مركز دائرة الطول وهكذا يزودنا بطريقة أخرى لايجاد هذين المركزين . في التعليل التالي لاشتقاق البيروني رمز **AH**

مثل $C = (B = Y) / (A = X)$ ينعكس النص العربي بكل أمانة حيث لا يكتفي البيروني بأن يذكرنا أن $C = A/B$ فحسب بل وأن A تساوي X و B تساوي Y . والآن يأتي التحليل كالتالي (انظر الشكلين Figs. 2,3) إذا كان $HK \perp AE$ فإن (حسب اقليدس) $AZ \cdot ZG = BZ \cdot ZH$ وكذلك $AZ \cdot ZG / BZ = ZH$ حيث $AZ = |ZE - 90|$ و $ZG = AZ + 180$ في حالة الشكل (Fig. 2) بينما $ZG = 180 - AZ$ في حالة الشكل (Fig. 3) . إذاً $ZH : HK = ZB : BE$ وهكذا :

$$ZH \cdot (90 = BE) / (ZB = R) = HK = Sin_{90}\ AH$$

إذاً $Sin_{60}\ AH = Sin_{90}\ AH - (1/3)\ Sin_{90}\ AH = 40'\ Sin_{90}\ AH$

ومن ثم $AH =$ قوس $Sin_{60}\ (Sin_{60}\ AH)$

وبالتالي $AH =$ قوس $Sin_{60}\ (40' \cdot ZH \cdot 90 / R)$

والذي سيقاس باتجاه B عندما تكون Z خارج الدائرة المعلومة وباتجاه D عندما تكون Z داخلهـــا . تحدث الحالة الأولى عندما تكون $ZE > 90$ وتحدث الحالة الثانية عندما تكون $ZE < 90$ في حين أنه عندما تكون $ZE = 90$ تقع Z في A .

١٩ : ٢٤ – ٢٠ : ٦ (انظر الشكل Fig. 4) لايجاد مركز دائرة العرض MTL نقول عرَضاً $(MS = Sin\ MD)$ ونلاحظ أن $SE = Sin\ (90° - MD = AM)$. بالتغيير الى المقياس التسعيني يكون : $SM = (3/2)\ Sin_{60}\ DM, SE = (3/2)\ Sin_{60}\ AM$ ومن ثم $TS = SE - TE$. ليكن R نصف قطر دائرة العرض ، $MS^2 = TS\ (SZ + R)$ وهكذا فإن $SZ + R = MS^2/TS$ وهذا معلوم . بما أن TS معلوم كذلك يمكننا حساب R من المعادلة المتطابقة $R = \frac{1}{2}\ TS + \frac{1}{2}\ (SZ + R)$ بينما $ET + R = EZ$ البعد بين المركزين . وهذه الصيغة أيضاً غير موجودة في « الآثار الباقية » .

٢٠ : ١٣ – ١٩ لإتمام حساب DH على البيروني أن يبين أن نقطة H تقاس دائماً من D باتجاه A أي أن مراكز دوائـــر العرض تقع خارج الدائـــرة المعلومة . وهـــو يلاحظ أولاً أن $DT : DE = DM = 90°$ وهذه هي خاصة النقطتين M و T المحددة، ثم يقول إن وتر $90° : (DM)$ وتر $DM : 90° >$ وهي مسألة مباشرة الاتصال بنظرية بطليموس الرياضية العامة التي استخدمها في المجسطي والتي تقول إنه إذا كان α و β قوسين لنفس الدائرة وإن $\beta < \alpha$ فإن $\beta : \alpha > \beta$ وتر : α وتر . وبما أن $DM < 90°$ ، $90°$ وتر : DM وتر $DT : DE >$

وكذلك بما أن DE<90° وتر فإنه يتبع ذلك أن DM>DT وتر . وهذا كما يرى البيروني يتضمن بالضرورة أنه لا يمكن لدائرة مركزها في D أن تمر من خلال نقطتي M و T معاً ولا يمكن أيضاً لدائرة يقع مركزها بين D و E أن تمر من خلال M و T .

٢١ : ٢٦ كتب **المسالك والممالك** هي أعمال اعطت الطرق والمواقع والأبعاد بين الأماكن لتستخدمها سلطات البريد ، وأول كاتب عرف في هذا المضمار هو ابن خرداذبه الذي كان موظفاً رسمياً في البريد في سامراء ، واستناداً إلى سوتر أنه كتب في حوالي ٨٤٥ م . يتكلم البيروني في كتاب « تحديد الأماكن » عن منهج الجيهاني وغيره في كتبهم عن المسالك، وفي كتابه « شرح تحديد الأماكن » يعرف ا. س. كنذي الجيهاني على أنه أبو عبد الله محمد بن أحمد الجيهاني الذي ازدهر على الأغلب في حوالي ٩٢٠ م . هذه الكتب التي شكلت في حد ذاتها تعليماً قام سنين طويلة صنفها حاجي خليفة الذي توفي سنة ١٦٥٧ — ٥٨ م في باب الجغرافيا تحت علم مسالك الممالك — في الجغرافيا — .

٢١ : ٢٧ يبدو أن تلوين الخرائط يرجع في النهاية الى زمن مبكر في عهد الخرائط العربية الأولى . ويذكر ڤيديمان في حاشية عن المسعودي قوله : « وهذه البحار كلها مصورة في كتاب جغرافيا (بطلميوس) بأنواع من الأصباغ مختلفة المقادير والصور ، ... إلا أن أسماءها في هذا الكتاب باليونانية يتعذر فهمها . » إن هذه الجملة الأخيرة ليست تعني بالضرورة أنه رأى خريطة يونانية (أي باليونانية) وإنما فقط أنه رأى نسخة عربية كتبت الأسماء اليونانية فيها بحروف عربية ، إذاً لا تزال « يونانية » .

٢٢ : ٣ — ٤ العبارة العربية هنا « مقالة في تصحيح » تنطبق تماماً على بداية العنوان الذي أدرجه البيروني في فهرس أعماله والذي يمثل الفقرة (4 و II) من ترجمة ڤيديمان لهذا الفهرس وهو (بحسب ترجمة ڤيديمان) : « مقالة في تصحيح (تقويم) مقادير طول وعرض الأماكن المعمورة في الأرض » . ولا نعرف لهذه المقالة نسخاً متواجدة .

٦ — مصادر التصوير (الاسقاط) عند البيروني

مع أن سوتر يخمن أن تطبيق البيروني كان اختراعاً بمثابة تعديل للاسقاط المجسامي (ستريو غرافي) فنحن ميالون إلى الاعتقاد بأن الحالة ليست كذلك . فقبل كل شيء يوحي الحساب بأن SR ، وهو أقصى بعد بين النقطتين اللتين تقطع عندهما دوائر البيروني الطولية AG (انظر الشكل Fig. 5) واللتين تقطع عندهما صور دوائرالطول في الاسقاط المجسامي (ستريو غرافي) AG ، يساوي نحو ٩ ٪ من نصف القطر .

وبالتالي فإن دوائر البيروني مدفوعة بشكل ملحوظ نحو المحيط قياساً الى الدوائر المجسامية لكن هناك دليل آخر باد للعيان ذاك أن البيروني لا ينظر إلى الاسقاط المجسامي (التصوير الستريوغرافي) على أنه يمثل خريطة جيدة للكواكب ، وقد عبر عن ذلك في « الآثار الباقية» . وبالنظر الى وعيه المدرك ونفاذ بصيرته في فهم تباين الغرض بين التصوير الاسطرلابي والتصوير الخرائطي ، يبدو أن البيروني لم يوفق في النظر الى من قبله ليستلهم منهم لمن بعده .

وحدسنا هو أن التصوير الذي وصفه البيروني هو في الواقع تبسيط للاسقاط المخروطي الثاني الذي وصفه بطليموس في « الجغرافيا » . وهذا الاسقاط الثاني حلله **Hopfner** ثم تبعه في ذلك **Neugebauer** . ويكفينا القول هنا إن فكرة بطليموس كانت في استخدام ثلاث أقواس دائرية متحدة المركز لتمثل ثلاثة موازيات عرضية وخط مستقيم ينصف الأقواس الثلاث جميعاً ليمثل خط الزوال المركزي .

بعد أن يتم اختيار مقياس الرسم بدقة تحدد دائرة معلومة من دوائر الطول في الكرة ثلاث نقاط كل واحدة منها تقع على احدى الأقواس الثلاث المتحدة المركز . والدائرة المارة بهذه النقاط الثلاث هي صورة دائرة الطول تلك .

يكون تعديل هذه الطريقة لمن يود تصوير نصف الكرة بكاملها بأن يدع أقواس الحد الشمالية والجنوبية تتضاءل في القطبين وأن يأخذ من أجل القوس الوسطى خط الاستواء الممثل حالياً بخط مستقيم ينصفه خط الزوال المركزي ويدرّج طبقاً للمقياس نفسه الذي درّج به خط الزوال هذا . إن النقطة المتناظرة مع الطول λ في خط الاستواء تحدد مع القطبين ، دائرة وحيدة تحتوي قوسها هذه النقاط الثلاث وتمثل دائرة الطول λ . وهي من أجل دوائر العرض ، كما هو الحال في خريطة بطليموس ، تقطع خط الزوال المركزي الى قطع تساوي فروقها فروق العرض . أمنت هذه الخاصة في خريطة البيروني ليس فقط خط الزوال المركزي وإنما أنصاف دوائر الطول المحيطية $\lambda = 90^o$ أيضاً (شرقاً وغرباً) ، وكذلك أقرت بالطبع اتساع تدريج المقياس هناك عن تدريجه في خط الزوال المركزي بعامل $\pi/2$. كما حددت من أجل كل مواز من موازيات العرض ثلاث نقاط ثابتة تمر فيها المنحنيات التي تمثل هذه الموازيات . وبذلك يستفيد البيروني من فكرة دوائر الطول ليستعمل للعرض دوائر عوضاً عن المنحنيات .

من المؤكد أن البيروني يعرف « جغرافيا » بطليموس حتّى إنه رجع إليها عبر تقديمه للتطبيق الذي استخدمه ما رينوس الصوري . علاوة على ذلك فإن النسخة العربية لـ « الجغرافيا» اشتملت على وصف بطليموس لتطبيقات استخدمت على الأرجح في الخرائط العربية . إلا أن البيروني حسب حدسنا اهتّم ، وهذه كانت حاجته أولاً ، بالتطبيقات التي ستصور نصف الكرة بكاملها ، مما استدعاه الى تعديل صنيع بطليموس ليصل بعد ذلك الى خريطة تصور نصف الكرة بكاملها .

٧ ـ التحريف في تطبيق البيروني

كما يلاحظ البيروني فإنه من المحال تمثيل سطح الكرة على مستوٍ منبسط بضبط واحكام، أي أنه لا يمكن الحفاظ على الزوايا والمساحات . وتبقى مهمة الخرائطي اختيار أفضل تصوير (اسقاط) يلائم متطلباته ، وقد كانت متطلبات البيروني جلية واضحة عبر عنها من خلال نقده اسقاطات الآخرين إذ يجب أن يتلاءم التصوير ويكون مناسباً بحيث يمثل نصف الكرة على أن لا يحصل ازدحام في بعض أجزائه . كما يجب أن يمثل (التصوير) الكواكب ومجموعات النجوم وبخاصة الهامة منها على طول منطقة البروج وأفلاكها بأشكال معقولة أقرب ما تكون إلى ما تراه العين .

ومن الواضح أن تصوير البيروني استجاب لمطلبيه الأولين . والسؤال الآن كيف تلاءم مع مطلبه الثالث ولم يدخل تحريفاً كبيراً على أشكال الكواكب نسبة إلى الجزء المركزي من قبة السماء ؟ لا شك أن البيروني فكر في كيفية تحقيق مطلبه الثالث هذا بشكل جيد معقول حتّى إنه ربما أنشأ هذه الخريطة لإرضاء رغبته الشخصية في هذا المجال ، تعلمنا خريطة البيروني هذه في الواقع أشياء كثيرة (انظر مقالنا بالانكليزية) .

في عام ١٨٨١ أنشأ **A.M. Tissot** نظرية في تصوير الخرائط أخذت بعين الاعتبار التحريف المحلي ومكنتنا من عمل قياسات خرائطية أدق . لقد شرح **P. Richardus** و **R.K. Adler** وكذلك **A. H. Robinson** هذه النظرية ، وقد أعطينا في بحثنا هذا نتائج التصوير الكروي عند البيروني فقط كما حسبه **L. Driencourt** و **J. Laborde** واستخرجنا ثانية بعض أجزاء جدولهما رقم **XXXII** (انظر **Chart I**) .

الخاتمــة

رأينا كيف أن البيروني في رسالته هذه التي ألفها فيما بين ١٠٠٤ و ١٠١٧ أضاف ثلاثة اسقاطات (تصاوير) جديدة إلى حصيلة التطبيقات المعتبرة التي كانت متوفرة آنذاك بين أيدي رسامي الخرائط المسلمين . وناقشناها وأظهرنا أنه استلهم أول هذه الاسقاطات الثلاثة من بطليموس ، ثم حللنا أهم اسقاطين بينها . وهما ، مهما احتويا مـــن التحريف ما يزالان في الواقع يستخدمان عموماً حتى يومنا هذا ، مما يدل بل ويعبر باختصار ، كيف أن شعور البيروني الواثق الأكيد قاده في مواضيع بحثه إلى نتائج هامة .

ثم اذا اريد عمل مجسم من المذكورات في كرة رسمت دايرة وعمل
فيها شكل شبيه بقاعدة المجسم ولتكن الدايرة اب ومركزها ر وضلع
الاضلاع المعمول فيها اب

ونخرج من نقط ا عمود ا د
على سطح الدايره ونجعل
ا د مثل ا ب ونضعه على
ب ونخرج من ه في
سطح خطي د ا ا ر ه ح
موازيا لا ر ونجعل ه ح
كان قسما ا ه دايرة ا ب

ا د كانت احدي دايرتي قاعدة الاسطوانة في كرة كان خرج على
استقامه لطرالكرة ه لان السطح المنصف للاسطوانة على موازاة
القاعدة يمر بمركز الكرة ضرورة لكون دايرتي قاعدتها متساويين ويكون
ه ح في ذلك السطح ونقطة ح على سطح الكره ونصل ح ر فهو عمود على سطح الدايرة
وميل ه ا ح مركز الكره ويصل د ح فهو يعرف قطر الكرة فونا على د ه ه ح ونخرج
ه ح الى ط مساويا لـ ح د ونرسم على سعد ح فدس د ط من عظيمة بذلك الكره ثم
نرسم في الكره المفروضة اولا عظيمة ك س ه ر ك وكل قطرها والمركز كر
ونقسم ك م على ن ه حتى يكون نسبة ك ن الى ن م نسبة ط ه الى ه ح
ومن ن عمود ن س ونصل س م س ك فلان نسبة ك ن الى ك م
كنسبة ط ه الى ط ح فقد سرط د نسبه قوس س ه ك وكنسبة س ن الى ن م
كنسبة د ه الى ه ح فنخرج س ع على س ن عمودا عليه فيحدث دايرة
نصف قطرها ساوي ن م ونخرج س ن الى ع فيكون نسبة
س ع الى المنصف قطرها كنسبه د ا الى ا ر ونسبه نصف قطرها الى
الى ضلع الشكل المعمول فيها الشبيه بقاعدة الاسطوانة كنسبة ا ر الى ا ب
فالمساواة نسبه س ع الى ضلع الشكل المعمول هو بقدر س ع وكذلك

[margin: س ر / س ر يكون / كما كنسبة د ا الى ا ب والضلع المعمول / القول]

القول في القاعدة اللعل المعموله في دايرة بمر سطح ع فاذا تممنا الشكل
خطل اسطوانة كما فرضت وذلك ما اردناه تم والحمد لله وحده
والصلوة والسلام على من لا نبي بعده

بسم الله الرحمن الرحيم
بارفع دوله واعز نصر وايمن طاير واسر حال وخير سعادة واجل ملك
واغبط مدة واحب فال
الشكر على النعم حق واجب في بداية العقول والفطن وبه يستحق المنعم عليه مرتبة
الزيادة في الحسنى من اجل ذلك تجب على في جميع الاوقات وفي كل الحالات
اثارة معالم الحمد والثنا واعادة مراسم الشكر والدعا وللعبيد رسوم يقيمون
بايرادها حقوق مواليهم ويظهرون لها عقايدهم في اعيادهم واحايين
فرحهم ومسراتهم على حسب احوالهم واقدارهم ومولانا الامير السيد
الملك العادل ولي النعم خوارزم شاه اطال الله تعالى في العز والرفعة بقاه
وادام قدرته وعلاه ونصر رايته ولواه وحرس ملكه وبهاه
وابد سلطانه وثبت دولته وسناه واكرم حفدته واعز اولياه وكبت
حسدته وخذل اعداه تاج الملوك قاطبة وايامه تاريخ ساير الايام
وحضرته معدن المعالي والمفاخر ومنبع المحامد والماثر ومنتجع افناء
الخلق من اقطار الارض لما ذاقوه فيها من طيبة الامن وحلاوة العدل
وعلو الهمة والجود الفايض على الكل والفضل الشامل للقاصي والداني
وتقريب اهل العلم[2] والحكمة وانزالهم على المنازل والتوفر عليهم فوق واصحاب[2]
الاستحقاق ورفعهم من الحضيض الى عنان السما فالله تحرس حضرته
الشريفة ويصون سدته المنيفة الرفيعة بمنه وسعة جوده
وها انا احد من نشات في ظل ملكه وانجذبت بعد طول الغربة
الى واسطة ممالكه ونلت بمجلسه العالي زاده الله تعالى رفعة
وعلاء من التقريب والارفاق من غير استيجاب واستحقاق

ما فقت به اقراني واشكالي وقربت بمبرته الي غايتي وكمالي وحق لمن
تسربل بمثل هذه الحلل ان يتجرد لخدمة مولاه ووليّ نعمه
سرا وجهرا ويبذل اقصى وسعه وغاية مجهوده في القيام
بلوازم الشكر وان كان المولى مستغنيا عنها ولكن اخذا بالافضل
وتمسكا بالاليق بطريق العقل وان ليلة السدق من الليالي
الشريفة والاعياد العظيمة الاكاسره واحبوا فيها رسوم
قدماء الملوك وفيها وفي امثالها يهدي الصغير الى الكبير ويتقرب
المامور الى الامير اظهارا للعبودية المستكنة في الضمير ولو
امكن التقرب الى المجلس العالي بالروح والبدن لكان مستصغرا
في جنب الحق الواجب لكن الخدمة العلمية اجل من غيرها واعلى
من سايرها وقد قرعت لهذا الكتاب بابها ورفعت اشارها
ومهدت لها طرقا ساجري على نسبتها فيما يستانف ما بقيت
جارًا اذيال هذه الخدمة الجليلة مستظلا اظلالها الظليله
والله الموفق لذلك والمعين عليه ان معرفة الصور
الشاملة للكواكب المرصودة من بين ما زين به السماء وجعلت
ايات للناظرين نظر اعتبار وعلامات للضالين في البر
والبحار ليس بيسير المنفعة والفايدة في كل واحد من
قسمي صناعة التنجيم اما في علم هيئة الافلاك والكواكب وحركاتها
ومزاولة الارصاد مما يحتاج اليه من اخذ ارتفاعاتها وابعاد
ما يليها ومعرفة الاوقات بالليالي عند الحاجة الى تحديدها
والابانة عن مكاييل الحركات وموازين الازمنة الماضية
منها والمستقبلة وتحقيق العودات في الافلاك الخارجة
المراكز وقياس ساير الكواكب اليها وما اشبه ذلك واما
في صناعة الاحكام المنبية عن انفعال الاجسام السفلية
من تاثير الاجرام العلوية مما لا خفاء به من الحاجة الي معرفة
اعظامها

اعظامها وكيفية مزاجاتها والوانها بالعيان ومواضعها من الصور
تستعمل في المواليد وتحاويلها وتحاويل سني العالم وطوالع الاجتماعات
والاستقبالات وليس ايضا بقليل الجدوى والعايدة في المعارف
العامية من استنباطها راوقات السنة عند اختلافها بترادف
الفصول ومعرفة الاحوال الطبيعية الحادثة في السنين
طول الدهر على قريب من نظام واحد من البرد والحر واليبوسة
والرطوبة والاعتدال والموجودة منها بالجارات غير مختلفة
الا باختلاف الامكنة والبقاع كالانواء والبوارح والوقدات و
والجمرات والبواحير وايام العجوز وامثالها مما يستعملها
الروم والهند والعرب ومعرفة اوقات النتاج والتي يجب
فيها القاح البهايم وغرس الاشجار وزرع الزروع وتختلف
في غيرها ومعرفة الاوقات التي تشتد فيها البحار وتهتاج
ويمتنع سلوكها ومعرفة وضع البلاد في الارض بعضها من بعض
ووضع الجبال والبحار والانهار وانعطافها وسلوك الطرق
المقاربة واستخراجها لتسرية العساكر وتسريح القوافل
ومعرفة مسامتة المواضع بعضها لبعض اما لقصدها واما
لاستقبال قبل النوا سير الموصى في كتب الله تعالى وكتب انبيائه
عليهم السلام استقبالها في موجب الشرايع وقل ما يوجد من يستوعب
معرفتها عيانا حتى يشير الى كل واحد منها اشارة تقنع السايل
وترشد الطالب الى اليقين بل اكثر ما اقول في ذلك على
الكتب المخصوصة بذكرها ككتاب عطارد بن محمد في محنة
المنجمين وكتاب عمر بن الفرخان الطبري في صورة الكره
وكتاب ابي الحسين الصوفي في الكواكب الثابتة وكتب
اصحاب الانوا المقصورة على ذكر مذاهب العرب ومعلوم
ظاهر ان تلك الصور المصورة في تلك الكتب وان حقق تصورها

ود فوق حكاياتها فانها عند تواتر النسخ وكثرة النقل تتغير ولا تثبت
على حالة واحدة بل تفسد وتبطل ولو كان النقل بالبركار و
المساطر وخاصة فان الصور التي في تلك الكتب هي مفردات
متميزة بعضها من بعض لم يصور فيها بالجملة حتى يستعان في معرفتها
والاحاطة بكيفية اوضاعها ووقوعها بقياس احدها الى الاخر
ومتى اراد مريد نقل ما ذكر من احوال هذه الكواكب في الكتب
والجداول المركبة لها الى اكر معلومة من اى جسم كان
محاكاة لها في كرة الفلك على ما بينت في كتاب صنعة الكره
لم يغادر المحكية بوجه من الوجوه وكانت واقعة
في العيان بالكلية غير مفردة ولكن ليس يخفى
ان ذلك يمتنع في صغار الاكر ويمكن في كبارها والكبار
منها عزيزة الوجود عظيمة المؤنة في النقل والحمل وفي الاستعمال
والمباشرة حتى ان صعوبة ذلك فيما يوازي الانتفاع لها
ان لم يفضل عليه فاما اذا نقلت هذه الكواكب وصورها الى
بسايط السطوح المستوية المعتدله فان ما صعب في الاكر
يسهل فيها لكن الامر في المحاكاة لها ان تجري على مجراه في الاكر
ولما وقفت على كتاب بطليوس في صورة الارض المرسوم
بجغراوفياط وما حكاه فيها من فاريبوس من الارشاد
الى كيفية تصوير صورة الارض في سطح مستو من
تخطيط خطوط متوازية لخط الاعتدال واقامتها مقام
دواير العرض اعني اقلاك انصاف النهار وبتخطيط
خطوط موازية لخط الاعتدال واقامتها مقام دواير
الطول اعني المدارات الموازية لمعدل النهار وزعم ان
تقاطع دايرة طول البقعة المطلوبة مع دايرة عرضها
هو موضعها في سطح التصوير وليس يخفى على متامل ان الطول

الكلى

الكلّي الذي هو نصف دور في كل مدار يكون في هذا الوضع بالقرب
من القطبين مساوي القدر لخط الاستوا لامتناعها له مشابهة المدارات
في الكرة وان العروض توجد علي خطوط متوازية وهي في الخطوط توجد
من خطوط لا تتوازي ولكن تجتمع علي نقطتين باسرها وذلك محال ٤ ، ٤
وبمثله بينها محمد بن جابر البتاني في زيجه حين اراد استخراج سمت
القبلة وموضع مكة من سطح الافق فاخذ من طرف سطح الاعتدال
الاقرب الي مكة في محيط الدائرة مقدار فضل ما بين العرضين في جهة
الجنوب وان كان عرض مكة اقل من عرض البلد وفي جهة الشمال
ان كان اكثر منه واخرج من المنتهي خط العرض موازيا لخط الاعتدال
ثم اخذ من طرف خط نصف النهار الذي في جهة خط العرض مقدار
ما بين الطولين الي الجهة التي فيها مكة عن البلد واخرج من المنتهي
خط الطول موازيا لخط نصف النهار وزعم ان ما تقاطع خط الطول
من خط العرض هو موضع مكة في سطح الافق فاستخرج به حينئذ
مقدار بعد سمته وذلك من عمل سمت القبلة خطا فاحشا قد استدركه
عليه جميع العلما في كتبهم في سمت القبلة كابي سعيد احمد بن محمد بن عبد الجليل
وكابي منصور علي بن عراق وكابي محمود حامد بن الخضر الخجندي حملني ذلك
علي تاصيل اصول يتوصل بها في تصوير ما في كرة السماء من الكواكب والصور
وما في كرة الارض من البلاد والجبال والبحار والانهار وغيرها
ليبني عليها من عني بذلك ولا يميل لغيره فاقول انه معلوم المعنيين بالات
التنجيم وصناعاتها والتفحص عن حقايقها ودقايقها بعد النظر في علم
الهيئة واخذ الحظ الوافر من الهندسة ان الدواير والنقط التي في
الكرة لا تنتقل الي السطوح المعتدلة الا بان يمر عليها خطوط مستقيمة
وبسيط مخروطات قايمة ومايلة وبسايط اساطين وبسايط مجسمات
ناقصة اما الخطوط المستقيمة وبسايط المخروطات فهو الذي نبه عليها
صنعة الاصطرلاب وباختلاف وضع رووس المخروطات ومبدا

ومبتدا تلك الخطوط في جهتي الشمال والجنوب صارت الاسطرلابات
جنسين جنوبي وشمالي وباختلاف اوضاعها على المحور اما على قطبي
الكرة واما داخلها واما خارجها على استقامة المحور تنوعت
الدواير المنقولة له فصارت في السطح خطوطا مستقيمة ودواير
وانواع الثلاثة الزايدة والناقصة والمكافية ومعلوم ضرورة
عيانا ان الدواير المتساوية الابعاد في الكرة في الكرة تنسطح في
هذه السطوح اما مختلفة الابعاد ان توازت واما مختلفة
الابعاد وغير متوازية فتتضايق ابعادها باعيانها في مواضع وتتسع
في اخر ولما كان ذلك كذلك لم يكن المنقول منها على نسب ابعادها
في العيان الا ان يكون السطح مماسا لوسط الصورة المقصودة ورووس
المخروطات خارجة من راس القطر القايم على ذلك السطح فحينئذ
يقل التفاوت في العيان ومهما كانت الصورة الى راس المخروطات
اقرب كان التفاوت المذكور اكثر وقد يمكن نقل ما في الكرة الى
السطح بطريق آخر قد نسبه ابو العباس الفرغاني في عدة نسخ
من كتابه الموسوم بالكامل الى يعقوب ابن اسحاق الكندي
وفي عدة منها الى خالد بن عبد الملك المروروذي وهو الذي
وهو الذي يسمي اسطرلابا مبطحا ووحدته كتابا مقصورا
على صنعته واصحاب هذه الصناعة فيه فريقان اما مستحسن
واما مستهجن اياه اما المستهجن فقد يبغضه اصلا حتى يتحامل
في الرد على صاحبه ويتنقص له وذلك كالفرغاني واما المستحسن
فمن زاعم ان الكرة قد توهمت فيه مبطحة على احد قطبيها منفقئة
على القطب الآخر ومن زاعم انه ليس بين هذا الاسطرلاب
وبين التسطيح المذكور مشاركة لكنه جار مجرى الالات المهياة
لاستخراج الطوالع والارتفاعات كالرخامات وغيرها وانا
ثالث هذا الفريقين ومدع في هذا الاسطرلاب ما اعتقده

مي انه

من انه نوع من انواع التسطيح المخروطي المتقدم ذكره وساعمل
في صنعته والابانة عن حقيقته كتابا فيما بعد انشا الله تعالي
او الان اقول ان تسطيح المبطح لم يمكن فيه الا تصور احد نصفي
فلك البروج اما الشمالي واما الجنوبي وسطل اضافة النصف الاخر
اليه لاتساع الانفراد فيه كلما ازدادت ضيقا في الكرة ومجاوزة
الحد المتناهي بمثله في ذلك ثم اكتفي علي تصور كل واحد من نصفي
فلك البروج في شكل علي حدة فان اعظم الصور نفعا واكثرها
حاجة الي العيان اعني المعترضة علي وسط منطقة البروج
وعلي معدل النهار ينقطع وينقسم الي كلا الشكلين وذلك
مما يبعد عن المطلوب واما التسطيح الاسطواني فهو الذي خطر
ببالي من كثرة ما خاض فيه الفرغاني من الهذيان في اخر كتابه
من الرد علي الاسطرلاب المبطح واظن ان السبق لي اليه وقد سميته
التسطيح لعله ليس هذا موضعها وهو نوع متوسط لا شمالي ولا
جنوبي وبه يمكن ان تسطح كواكب الفلك باسرها في سطح فلك معدل
النهار او في سطح اي دايرة عظيمة فرضت لكن الصور الشمالية
والشمالية تجتمع فيها وتتراكم بعضها علي بعض والكواكب القريبة
من محيط دايرة التسطيح تتضايق مواقعها جدا وتتفاوت حتي ربما
يركب كواكب جنوبية وشمالية فاتحدت في راي العين فاما المسامتة
منها المركز دايرة التسطيح البعيدة من محيطها فوقوعها يكون قريبا
من الحقيقة وقد سمعت ابا احمد بن عبد الجليل المهندس يحكي عن
ابي حسين الصوفي انه كان يضع الكاغد الرقيق علي الكرة ويلفه
علي بسيطها حتي يطابقها مهندما علي ظاهرها ثم يخط فوقها
الصور وينقط الكواكب علي حسب ما يظهر منها بالاشفاف
وذلك تقريب اذا كانت الصور صغيرة ويبعد اذا كانت
كبيرة فانه اعني ابا الحسين يزعم في مواضع من كتابه وفي

عدة من الصور انها ترى في الكره خلاف ما ترى في السماء وذلك
لخطاي جدا ول المجسطي التي منها تعمل الكره فلعمري ان كان ذلك
الخطا اليسير يوقع في الكرة ما يظهر به التفاوت للعيان فلم بالحري
ان يقع في السطح المستوي الذي لا يطابق المقبب مهندسا الا بان
تنعطف منه مواضع وتلتوي وتتضاعف فاذا اعيد الى استوايه
عاد المنعطف منبسطا والمضاعف منفردا واذا كانت الوجوه المذكوره
الاوجه
كلها كثيرة التفاوت بين ما يعاين في الكرة وبين ما يعاين في السطح وجب
علينا ان نحتال لها حيلا تقرب بها الامرين العيانين وان كان امتناع
وجود النسبة المنطوق بها بين الخط المستقيم وبين المستدير وعدمها
كذلك بين السطح المستوي وبين السطح الكري تحول بيننا وبين ان
نعمل ذلك كما هو بالحقيقة فاقول انا اذا اردت ان نصور
الصور الفلكية على سطح مستو فانا ندير على مركز ه دايرة الحد
لنصف الفلك الذي من اول برج الحمل الى اخر برج العذرا ونربعها
بقطري اح ب د وليكن نقطة ا لاول الحمل وح لاخر العذرا
وب للجنوب ود للشمال ونقسم كل واحد من ارباع محيطها الاربعة
بتسعين قسما متساوية ونقسم ايضا من انصاف قطريها الاربعة
بتسعين قسما متساوية ونخرج هذين القطرين في جهاتها
على استقامة منها خارج الدايرة بلا نهاية مفروضة ونطلب على
كل واحد من خطي ه ا ه ح مراكز دواير تمر كلها على نقطتي
ب د وكل نقطة من اقسام القطر ونطلب ايضا كل واحد من خطي ه ب
ه د مراكز دواير تمر على جزء جزء من اقسام القطر وعلى مثل
عدد من اقسام المحيط من كلا الجانبين ففي المثال نجعل اح
قسما واحدا من اقسام اه التسعين ونطلب على خط ه ح مركز
دايرة تمر على نقط ب ح د فاذا وجدناه وفتح البركار بذلك
ادرنا به ايضا من الجهة الاخرى على مثله فيكون مثلا كدايرة

٦٦/٢

يرد ونسمي هذه الدواير دواير الطول ثم نفرض كل كل واحد من قوسي
امج حسج قسما واحدا من اقسام القطر ونطلب واحدًا من اقسام القطر
ونطلب علي خط هد مركز دايرة تمر بنقط م ن ج فاذا وجدناه وفتح البركار
بذلك ادرنا به ايضا من جهة الجنوب علي مثله كدايرة لكط فيكون قطرها
في الجنوب ونسمي هذه الدواير دواير العرض فاذا فعلنا ذلك لكل جزء تم لنا
كل واحد من دواير الطول والعرض مائة وثمانية وسبعين دايرة
سوي خطي اهج هد وخط دايرة ابجد ثم نجي الي كل كوكب من التي
درجاتها فيما بين اول الحمل واخر العذرا
فناخذ بعد درجة من اول
الحمل وبعد مثله من نقطة الحمل
خط اهج بحيث انتهينا تكون درجته
ودايرة الطول المارة علي تلك الدرجة
هي دايرة طوله ثم ناخذ مقدار عرضه
ونعد مثله من درجته علي دايرة طوله
من الاقسام التي قسمنا عليها دواير
العرض ان كان شماليا فالي د وان كان جنوبيا فالي ب بحيث نفد
العدد فهناك موضع ذلك الكوكب فنسقط عليه ففي المثال كانا فرضنا كوكبا بعده
من اول الحمل درجة واحدة وعرضه في الشمال درجة واحدة فعددنا من نقطة
ا الي قطر اهج قسما واحدا من اقسامه فانتهينا الي نقطة ح فقلنا انه درجته
والدايرة تمر علي ح هي دايره طوله ثم عددنا علي دايرة طوله الي جهة د
وهو الشمال قسما واحدا من اقسامه فانتهينا الي ع فقلنا ان ع موضع
الكوكب المذكور وكذلك لو فرض لنا كوكب في تسع وعشرين درجة من العذرا
وعرضه في الجنوب درجة واحده عددنا مثل بعده من من اول الحمل
وهو مائة وسبعة وسبعون درجة قسما من نقطة ا فكانا انتهينا
الي ن وهي درجته والدايرة المارة عليها هي دايرة طوله وعددنا عليها

في جهة الجنوب اعني جهة ب مثل عرضه الي ف فقلنا انه موضع الكوكب
المفروض وكذلك نعمل لكل كوكب درجته فيما بين اول الحمل الي العذرا حتى
تتم صورة النصف ونصور علي كل صورة صورة صورتها التي لنجومها كواكبها
علي حسب مايوجبه مواقع الكواكب من اعضايها ثم نعيد دايرة مثل
هذه المثل لها ويعمل عليها تلك الاعمال المذكورة ونعرضها للنصف
الذي من اول برج الميزان الي اخر برج السمكة ونفرض فيها
نقطة آ اول الميزان ونقطة ح آخر السمكة وناخذ ابعاد
درجات ما في الكواكب من اول الميزان ونعمل ما عملنا حتى يحصل لنا
جميع الصور في دايرتين وان اردنا ان لا تنقطع الصور
نقطة الاعتدالين وهي الواقعة عند حواشي
كلتا الدايرتين المذكورتين فانا نعمل معها تين الدايرتين دايرتين
آخرتين نجعل في احدهما نقطة آ اول برج السرطان وناخذ
ابعاد درجات الكواكب من اول السرطان وفي الاخرى نقطة آ
اول الجدي وناخذ ابعاد درجات الكواكب من اول الجدي
فنرسم منها ما يقع في الصورتين الاولتين ونتعرف اعظام
الكواكب مما ذكر في الكتب فيكون ما ينقطه على مواضعها بحسب
اقدارها بعد ان نفرض اعظاما لتلك النقط متوالية الاختلاف
متناسبة التزايد واما امزجتها فنهيئ اصباغا شبيهة بالوان
الكواكب السيارة ثم يمزج بينها لكل كوكب حسب ما ذكر من
امزجتها ونطلي عند الفراغ ما بقي بينها من المواضع الخالية باللازورد
تشبيها باللون اللازوردي الذي يرى على مسامتة ممر البصر
نحو الفلك ويكون تصويرنا الصور فوق اللازورد بالبياض الاسفيدا جي
ليكون اظهر لحس البصر فاذا فرغنا ذلك حصل لنا المطلوب
علي اقرب ما يكون من الطرق باذن الله تعالي ومشيته ومن
الصناع من يميل الي الحساب ويؤثره علي الطرق الصناعية

(margin: متناسبة)

تم

مع وجدنا عليه صناع الاسطرلابات والالات
فلذلك بنقل ما ذكرناه الي طرق الحساب و نرشد الي معرفة مقادير
اقطار الدواير وابعاد مراكزها من مركز الدايرة المفروضة ومجازات
الخطوط محيطا بها فنعيد دايرة ا ب ج د علي مركز ه بقطري ا ه ج
ب ه د و يفرض فيه دايرة ب ط د من دواير الطول ولتكن
مركزها نقطة ز ونصل ز ح تقاطع المحيط علي نقطة ح ونريد ان
نعرف ط ز الذي هو نصف قطر الدايرة التي منها ب ط د وه ز الذي هو
بعد ما بين مركز تلك الدايرة ودايرة ا ب ج د فلان كل واحد من ه ط
ط ج معلوم اذ هو مفروض ومسطح ط ه في مجموع ه د ز ط مساو لمربع
ه ب فانا اذا قسمنا ثمانية الاف ومايه اعني مربع ب ه علي ه ط خرج
مجموع ه د ز ط فاذا زدنا علي الخارج من القسمة ه ط اجتمع قطر دايرة
الطول واذا زدنا نصف ه ط علي نصف ما خرج من القسمة حصل ه ز
الذي هو بعد ما بين المركزين فاما معرفة المجازات اعني بعد ما بين نقطتي
ا ح فانا ننزل عمود ح ك فلان مسطح ا ز في ز ح مساو لمسطح ز ب في ز ح
يكون نسبة ا ز الي ز ح كنسبة ز ب الي ز ح فمتي ضربنا ا ز وهو فضل ما بين
تسعين جزءا وبين بعد ما بين المركزين في ز ح الذي هو في الصورة
مجموع ا ز الي مايه وثمانين جزءا وفي الصورة الثانية مايه وثمانون
منقوصا منها ا ز وقسمنا المجتمع علي نصف قطر دايرة الطول خرج ز ح وهو
المحفوظ ونسبة ز ح الي ح ك كنسبة ز ب الي ب ه فيضرب ز ح الذي هو المحفوظ
في تسعين الذي هو ب ه ويقسم المجتمع علي ز ب الذي هو نصف قطر دايرة
الطول فيخرج ح ك الذي هو جيب ا ح المطلوب لكن هذه الخطوط والجيوب
والاقطار التي تخرج لنا هي بالمقدار الذي به نصف قطر دايرة ا ح تسعون
جزءا فيجب ان نحول هذا الجيب الي المقدار الذي به نصف قطر هذه الدايرة
ستون جزءا حتي اذا قوسنا في جداول الجيوب خرج قوس ا ح وذلك
بان ينقص منه ثلثه او نضربه ابدا في درجتين دقيقة فيتحول الي المقدار

الستيني وهذه القوس التي هي قوس المجاز اعني اهح يكون الي
جهة ب متى كانت نقطة ز خارج الدايرة ويكون الي جهة د
متى كانت نقطة ز داخلها ومعرفة وقوع نقطة ز بقياس
مابين المركزين الي نصف قطر دايرة ابجد ان كانا متساويين
كانت نقطة ز منطبقة علي نقطة ا فكانت قوس المجاز
متلاشية وان كان بعد اكثر من تسعين اعني
اه كانت نقطة ز خارج وان كانت اقل من تسعين كانت
نقطة ز داخل الدايرة ومعلوم انا متى استخرجنا الك الزواير
الواقعة في نصف بجده
كنا قد عرفنا من نصف باده
فنجي الآن الي دواير العرض
~~ونريد ان نعلم فيها ما علمنا~~
ونعيد دايرة ابجد و
فيها قطعة دايرة مطل من
دواير العرض ونريد
ان نعلم فيها ما علمنا
في دواير الطول وليكن
مركزها ز فيصل احد وينزل عمود مر فوحيث قوس
مد وسه جيب تمامها اعني امه وهما معلومان من جداول
الجيوب اذا زدنا علي كل واحد منهما نصفه او ضربناه في تسعين
دقيقة ابدا نحول من المقدار الستيني الي المقدار التسعيني
معلوما ومسطح واذا كان سه لهذا المقدار معلوما واسقطنا هط
طس صح بقي طس في مجموع سر رط مساو لمربع مس فاذا ضممنا
مربع مس علي طس خرج عمود سر رط فاذا زدنا نصف
نصف طس علي مجموع سر رط اجتمع طر وهو نصف قطر
دايرة العرض واذا زدناه ط علي طس اجتمع ما بين
المركزين

المركزين فاذا اردنا ان نعرف قوس ح د التي هي المجاز فانا ندبر
فيه ما دبرنا في دوائر الطول اعني ان نسبة در الى رح كنسبة ار
الى رك فيكون حر معلوما ونسبة حر الى حك كنسبة را الى اه
فيصير حك معلوما فيحوله الى المقدار السنيني ونقوسه في جداول
الجيوب فيخرج قوس حد ومهما عملنا هذه الاعمال لدوائر العرض
في نصف ادده فكانا عملناها ايضا النصف اب حد وذلك ما قصدنا
له ومراكز دوائر العرض تقع ابدا خارج الدائرة من اجل انا
متى اردنا اي دائرة من دوائر من دوائر العرض فرضنا
قطعة من خط ده شيا نسبته الى خط ده كنسبة ما يقطعه من قوس
دا دح الى ربع دائرة وذلك يكون ابدا انقص من كل واحد من
وتري تينك القوسين فمتى كان مركز تلك الدائرة نقطة د
كان نصف قطرها هو وتر احدى تينك القوسين
فلم يمر بنهاية القطعة الماخوذة من نصف قطر ده بل جاوزها
الى جهة نقطة ه ومتى مر عليها كان المركز واقعا بالضرورة
خارج الدائرة فاذا لم يمكن الامر في نقطة د فكم بالحري ان لا يمكن
فيما هو داخل الدائرة وذلك
ما اردنا ان نبينه والله
المستعان ولتصوير
هذه الصور طريق آخر
قريب ايضا وهو ان نهيء
مسطرة مقسومة بمائة
وثمانين جزءا ونخط على
سطح مستو خطا مستقيما
ونقسمه بهذه الاقسام ثم نعمد في كرة مصورة الى كوكبين
من كواكب صورة ما ونقيس البهما كوكب ثالث حتى يصير من

ابعاد ما بينها مثلث ونعرف مقادير تلك الابعاد بان
يوضع على كل كوكبين منها حرف حلقة من حلق الكرة
العظام ثم يوخذ مقاديرها من المسطرة بالبركار ويخط
منها على السطح المفروض مثلث ثم يوخذ في الكرة كوكب ثالث
ويقاس الى الكوكبين من كواكب الثلث فيهيا من ذلك مثلث ثان
ويعرف مقدار ضلعيه ويوخذان من المسطرة بالبركار
ويخط على تلك القاعدة المخطوطة في المثلث الاول مثلث من
ذينك المقدارين في جهتهما وكذلك نعمل حتى ناتي على الكواكب
كلها حتى نصور عليها الصور وليس في الكرة نقطة الا وبها
منها مع نقطتين سواها مثلث فلن يتعذر على العامل ما ذكرناه
وايضا فلو طلي في الكرة على مواضع الكواكب شيء يوثر بالمماسة ثم وضعت
الكرة على السطح المقصود فيه التصوير ثم دحرجت عليه بحركة
تتصل بالدوران ولا تزول عن الموضع واجتهد في ان يكون التدحرج
عليه من جميع نواحيها بالسوا فان مواضع الكواكب تؤثر بما
طلي عليها امثالها في السطح ومتى استعمل الرفق في هذا الاخير
لم يكن بين ما يحصل وبين الحقيقة الا ما بين مثبتي الجزء الذي
لا يتجزا وبين نفاته والامر في تصوير كرة الارض بما عليها على مثل
ما ذكرناه في الكواكب حذو بالعدة بالعدة لا تخالف اما في كرة السماء
فيحتاج فيه الى جداول الكواكب الثابتة وموضع المجرة من
كتاب المجسطي او كتاب ابي الحسين الصوفي او زيج
محمد بن جابر البتاني وامثال ذلك واما في كرة
الارض فيحتاج الى ما في كتاب جغرافيا من ذكر
الاطوال والعروض للبلاد والقرى والبحار والعيون
والانهار والرمال والجبال والمعادن وما يقع من الانعراج
والانعطاف وغير ذلك حتى يكون عملها في السطح بحسب ذلك

حينئذ[2]

وقد جرى

جرى مجرى الصور للارض من اصحاب كتب المسالك والممالك
ان يلونوا البحار بالخضرة الفستقية والمياه الجارية بالكهربية
والاسمانجونية والرمال بالصفرة الزعفرانية والجبال البنفسجية
المشوبة بالحمرة اليسيرة والبلاد بالحمرة الزنجفرية على اشكال
مربعة والطرق بالغبرة وبالادكنية فليكن الاتفاق بالاصطلاح
الواقع بينهم شبيها بما ذكرناه فان لم يتمكن من هذين الجنسين
من الكتب احتجنا الى تولي عمل ما فيها اما ارصاد الكواكب فبذات
الحلق والالات المهياة لذلك واما ما على الارض فبمعرفة الاطوال
والعروض لكل واحد من الطالب فيها وقد سبق لي مقالة في
تصحيح ذلك وكيفية الطريق الى معرفة كل واحد منها لكن معرفة
تولي ذلك مما يحوج الى عمر طويل لم تجر به العادة للانس والى
امر نافذ في اقطار الارض واموال تفرق في اقطارها سكانها
والمرشحين منهم للمواطاة في ذلك مع من يتفق من للحوادث الزمانية
وقل ما يجتمع ذلك لشخص واحد من اشخاص البشر وخاصة في هذه
الادوار التي نحن فيها فلذلك يجب ان نقتصر على عمله القدما ونصرف
الهمة الى تصحيح الشيء بعد الشيء مما تقع فيه التهمة بصنوف ما يمكن من
التصحيحات فان طالب الكل مضيع للكل والمريد بلوغ النهايات عاجز عن
ادراكها وجان على نفسه آفة ضياع العمر وافساد الاجتهاد وخسران
الدخاير واوسط كل شيء محمود ومن طرفي الافراط والتفريط بعيد والله
تعالى مدح الذين يستمعون القول فيتبعون احسنه جعلنا الله ممن
ممن يتبع رضاه ولا يتخذ الهه هواه وكفانا مهم الدارين انه
على ما يشاء قدير وهو عليم بذات الصدور
تم كتاب تسطيح الصور وتبطيح
الكور والحمد لله رب العالمين
وصلى الله على سيدنا محمد وعلى اله
وصحبه اجمعين وسلم
تسليما

22. Rasulov, A., "Abū'l-Rayḥān Muḥammed ibn Aḥmad al-Bīrūnī, On Multiple Projections of Parts of Groups of Stars" (in Uzbek) in *Collection Dedicated to the* 1000th *Anniversary of the Birth of al-Bīrūnī*, (ed. U. I. Karimov and A. Irisov), Ŭsbekistan SSR "Fan" Našriēti, Tashkent, 1973, pp. 300-314.

23. Richardus, P. and Adler, R. K., *Map Projections* (Amsterdam: North-Holland, 1972).

24. Robinson, A.H., *Elements of Cartography* (2nd ed.), (New York: John Wiley and Sons, 1964).

25. Roblin, H. S., *Map Projections*, (Great Britain: E. Arnold, 1969).

26. Rozenfel'd, B. A., Rozhanskaya, M., and Sokolovskaya, Z., *Abu-r-Rayḥān al-Bīrūnī* (Russian) (Moscow: Akad. Nauk CCCP, 1973).

27. Saᶜīdān, A.S., "Kitāb tasṭīḥ al-ṣuwar wa tabṭīḥ al-kuwar li-Abī'l-Rayḥān al-Bīrūnī", *Dirāsāt*, 4. (Amman: The Jordanian University, 1977), 7-22.

28. Sezgin, F., *Geschichte des arabische Schrifttums*, Vol. 5: Mathematics and Vol. 6: Astronomy, (Leiden: E.J. Brill, 1975 and 1978).

29. Suter, H., "Über die Projektion der Sternbilder und der Länder von Al-Bīrūnī", *Abh. zur Gesch. der Naturwiss.*, Erlangen, 4 (1922), 79-93.

30. Tissot, M. A., "*Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, (Paris: Gauthier-Villars, 1881).

31. Tooley, R. V., *Maps and Mapmakers*, (London: B.T. Batsford, 1949).

32. Toomer, G.J., *Diocles on Burning Mirrors*, (Berlin: Springer - Verlag, 1976).

33. Wiedemann, E., *Aufsätze zur arabischen Wissenschaftsgeschichte*, Vols. I-II. (Hildesheim: Georg Olms, 1970).

Bibliography

1. Ahmedov, A. and Rozenfel'd, B.A., "The *Cartography* – one of Bīrūnī's first essays to have reached us", (Russian) *Mathematics in the East in the Middle Ages*, (Tashkent: "Fan", 1978), pp. 127:153.

2. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayḥān, *Istīʿāb al-wujūh al-mumkina fī ṣanʿat al-asṭurlāb*, unpublished.

3. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayḥān, *The Chronology of Ancient Nations* (tr. and ed. E. Sachau), (repr. Frankfurt: Minerva, 1969).

4. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayḥān. *The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology*, (tr. R. R. Wright,), (London: Luzac and Co., 1934).

5. Al-Bīrūnī, Abū'l-Rayḥān, *The Determination of the Coordinates of Cities* (tr. J. Ali), (Beirut: American University of Beirut, 1967).

6. Craig, J. I., *Theory of Map Projections*, (Cairo, 1910).

7. Deetz, C. H. and Adams, O. S., *Elements of Map Projection*, U. S. Coast and Geodetic Survey Special Publication No. 68, (repr. New York: Greenwood Press, 1969).

8. Driencourt, L. and Laborde, J., *Traité des Projections des Cartes* Géographiques, Fascicules I-IV, (Paris: Hermann et Cie,. 1932).

9. Fiorini, M., *Projezioni delle carte geografiche*, (Bologna, 1881).

10. Fiorini, M., "Le Projezioni Cartografiche di Albiruni", *Bollettino Soc. Geog. Italiana*, Ser. III, 4 (1891).

11. Fischer, Jos. (ed.), *Claudii Ptolemaei Geographiae Codex Urbinas Graecus* 82, (Leyden: Brill-Leipzig: Harrassowitz, 1932).

12. Kennedy, E. S. and Hermelink, H., "Transcription of Arabic Letters, in Geometrical Figures", *Journal of the American Oriental Society*, 82 (1962), 204.

13. Kennedy, E. S., *A Commentary upon Bīrūnī's Kitāb Taḥdīd al-Amākin*, (Beirut: American University of Beirut, 1973).

14. Kennedy, E. S. and Yusuf ʿId, "A Letter of al-Bīrūnī: Ḥabash al-Ḥāsib's Analemma for the Qibla", *Historia Mathematica*, 1 (1974), 3-11.

15. King, D., Article "Kibla" in *Encyclopedia of Islam* (2nd Edition), Vol. III, (Leiden: E.J. Brill, 1979), pp. 83-88.

16. Luckey, P., "Beitrage zur Erforschung der islamischen Mathematik", *Orientalia*, 17 (1948), 490-510.

17. Maling, D. H. "The terminology of map projections", in *International Year-book of Cartography*, Vol. VIII (London: George Philip and Son Ltd., 1968), pp. 11-64.

18. Mžik, Hans V., (trans. and comm.), *Des Klaudaios Ptolemaios Einführung in die darstellende Erdkunde*, Teil I., (Wien, 1938).

19. Nallino, C. A., Al-Battānī sive Albatenii Opus Astronomicum, Part III (Textum Arabicum Continens,) (Milan: U. Hoeplium, 1899).

20. Neugebauer, O., *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (3 parts), (Berlin: Springer-Verlag, 1975).

21. Ptolemy, K., *The Almagest*, (ed. K. Manitius) Vol. I, (Leipzig: B. G. Teubner, 1963).

then the maxima are respectively 26°26', 1.678 and 1.571, which are 81%, 94% and 100% of the corresponding maxima for the whole hemisphere. Even though these maxima occur at the boundary the corresponding numbers are not that much better for any reasonable extent of longitude within the map and the figures indicate there will be considerable distortions in shape. It is evident that, with respect to the first two indices, 2ω and (a), al-Bīrūnī's "rolling" projection is rather better.

Conclusions

We have shown that in this treatise, written sometime between 1004 and 1017, al-Bīrūnī added three new map projections to the already considerable store available to medieval Muslim cartographers. We have argued that the inspiration for the first of the new projections he describes came from Ptolemy's second projection and have presented data analyzing the two most important of his three new projections. Although these data show that, by almost any measure, the two projections yield rather large distortions it is a fact that both of them are in common use today, a fact which indicates how al-Bīrūnī's sure feeling for the subjects he investigated led him to important results.

CHART I

The value of 2ω, the maximum distortion of an angle, at a given longitude (λ) and latitude (φ).

φ	λ						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0′	0°54′	3°31′	7°38′	12°56′	19° 3′	25°29′
15	0.22	1.26	4. 1	8. 1	13.13	19.16	25.51
30	1.30	2.43	5.21	9. 8	14. 4	19.56	26.26
45	3.23	4.40	7.24	10.57	15.30	21. 4	27.25
60	6. 2	7.20	10. 7	13.27	17.32	22.40	28.47
75	9.30	10.47	13.33	16.39	20.13	24.48	30.34
90	13.48	15. 3	17.45	20.37	23.36	27.31	32.47

The values of (a) the ratio of the longest to the shortest image of a unit vector at a given longitude (λ) and latitude (φ).

φ	λ						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,066	1,083	1,134	1,219	1,337	1,489	1,675
15	1,073	1,092	1,143	1,227	1,344	1,495	1,678
30	1,095	1,115	1,168	1,251	1,365	1,511	1,687
45	1,131	1,154	1,209	1,292	1,401	1,539	1,702
60	1,185	1,209	1,268	1,351	1,454	1,578	1,723
75	1,259	1,285	1,348	1,431	1,525	1,632	1,751
90	1,358	1,385	1,454	1,536	1,619	1,701	1,787

The values of σ, the distortion of area at a given longitude (λ) and latitude(φ)

φ	λ						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,016	1,063	1,143	1,254	1,396	1,571
15	1,007	1,023	1,071	1,150	1,260	1,401	1,571
30	1,026	1,043	1,093	1,173	1,281	1,415	1,571
45	1,061	1,078	1,130	1,211	1,316	1,438	1,571
60	1,111	1,130	1,185	1,268	1,367	1,471	1,571
75	1,181	1,202	1,261	1,345	1,434	1,514	1,571
90	1,273	1,297	1,361	1,445	1,521	1,567	1,571

smooth surface onto another, [30]. Several good accounts of this theory exist, e. g. in [23, pp. 49-56] and [24, pp.324-29], of which we follow the latter, specialized to the case where one surface is a globe and the other a plane. Let (φ,λ) be the geographical coordinates of a point on the globe and (Φ,Λ) the image of this point on the plane. Locally the mapping induces a mapping from the plane tangent to the globe at (φ,λ) onto the image plane. Taking a small circle, of unit radius, about (φ,λ) in the tangent plane, Tissot showed that there is a unique pair of orthogonal diameters (called the "principal tangents") of this circle which are mapped to orthogonal straight lines through (Φ,Λ) in the image plane. Let $2a$ and $2b$ denote the lengths of these images, with $a \geqslant b$. If a point traverses the circumference of the small circle about (φ,λ) its image in the plane traces out an ellipse whose center is (Φ,Λ) and whose principal semi-axes have lengths a and b respectively. This ellipse is called *Tissot's indicatrix* and two perpendicular radii of the small circle map onto two conjugate semidiameters of the indicatrix. It then follows from the properties of conjugate diameters that if α,β denote the local scales along the images of a parallel and a meridian passing through (Φ,Λ) then $a^2+b^2=\alpha^2+\beta^2$ and $ab=\alpha\beta\sin\gamma$ where γ is the angle between the images of the parallel and the meridian. We may solve these equations for a and b by showing first that $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2=1-d^2$, where $d=\frac{2\alpha\beta\sin\gamma}{\alpha^2+\beta^2}$. Then setting $k=b/a$ we find $k^2=\frac{1-c}{1+c}$, where $c=\sqrt{1-d^2}$ and finally, solving this for k and simplifying we find $k=1/d-\sqrt{(1/d)^2-1}$. Having found $k=(b/a)$ we may use $ab=\alpha\beta.\sin\gamma$ to calculate $b=\sqrt{\frac{b}{a}.\,ba}$ and then $a=k^{-1}\cdot b$. When these have been calculated it is easy to calculate 2ω, the maximum variation of an angle U whose vertex is at (φ,λ), by the rule $\sin\omega=(a-b)/(a+b)$, and the local distortion ratio of areas, which is equal to $a\cdot b$.

The calculation of these indices of distortion was done by L. Driencourt and J. Laborde in their monumental work, [8, fasc. II], and we reproduce parts of their Tableau XXXII as Chart I. It is evident from these that the maximum distortion in angle (2ω) is 32°47', the maximum value of the ratio, at a given point, of the longest image of a unit vector to the length of the shortest image, (a), is 1.787 and the maximum of the ratio measuring the distortion of area (σ) is 1.571 (i.e. $\pi/2$). For the stereographic projection the corresponding values are 0°, 2.0 and 4.0 while for the projection obtained by rolling the sphere along great circles passing through a point the maxima are, respectively, 25°39', 1.571 and 1.571. (These values may be found in Driencourt and Laborde [8, II, p.22].) Since al-Bīrūnī definitely wanted to construct a map of the whole hemisphere these extreme values are relevant, but if we ask how good it is for the constellations lying near the ecliptic, say $\varphi \leqslant 30°$,

is of course well-known as one which maps angles on the sphere onto angles of equal size on the plane, though as Neugebauer says [20, p. 860] there seems to be no mention of this fact in the ancient or medieval literature on the astrolabe. However, this projection does not preserve the areas of figures and, while there are projections that do this, they do not preserve angles. The incompatibility of these two requirements is a consequence of the fact that a spherical surface cannot be applied to a plane without distortions, a proof of which is given in Craig [6].

This fact, that no mapping of the sphere onto the plane can preserve both angles and areas, is of considerable theoretical interest but, as a practical matter, there are many useful projections which preserve neither angles nor area (e. g. the orthographic and azimuthal equidistant) and the real task of the cartographer is to pick that projection which most nearly suits his purposes, whatever it may or may not preserve.

Al-Bīrūnī's requirements are fairly clear if we keep in mind his criticisms of the other projections he mentions: the projection must be one that is suited to representing a hemisphere, there must be no "crowding" in some parts of it, and it must represent the constellations, particularly the important ones along the zodiac, by shapes reasonably close to those which we see.

It is clear that his projection satisfies the first two requirements. The question is, how does it measure up to the third, that it not introduce too much distortion of the shapes of the constellations along the central portion of the sky? Al-Bīrūnī evidently thought it fulfilled this requirement reasonably well and it is quite possible that he actually constructed a map to satisfy himself on this point, even though he makes no mention of any construction in this work. In fact a considerable amount can be learned about this mapping simply by using a flexible ruler and protractor – for example, that circles of longitude (latitude) of constant difference divide a given circle of latitude (longitude) into arcs of constant length (though of course a different constant for each one), that the ratios to the length of the equator of the arc length of the parallels of latitude φ, $\varphi \leq 30^\circ$, are very nearly $\cos\varphi$ (for $\varphi = 30^\circ$ the ratio is approximately .89 while $\cos 30^\circ \approx .87$), and that the acute angles the meridians make with the parallels (which are right angles on the sphere) decrease with increasing latitude and longitude (for example for $\varphi = 30^\circ$, $\lambda = 90^\circ$ the angle is about 82° while for $\varphi = 60^\circ$, $\lambda = 90^\circ$ it has decreased to 74°).

It is possible to make these somewhat rough measurements more precise by the calculation, for selected points on the map, of what cartographers call Tissot's indicatrix. Although the calculations which follow have little relevance to the time of al-Bīrūnī it may nevertheless be of interest to set al-Bīrūnī's mapping against modern criteria to see how it measures up.

In 1881 M. A. Tissot established a theory of cartographic mappings which yields a measurement of the local deformation of a particular mapping of one

that these intervals faithfully represent the distances between the corresponding parallels on the sphere and that each of the arcs faithfully represents 180° of arc at the given latitude relative to the length of the central meridian. For an arbitrary longitude λ ($0<\lambda\leqslant 90^{\circ}$) one may use the scale on each of the three arcs to find the point corresponding to longitude λ (say east of the central meridian). These three points determine a unique circle and the part of that circle between the two external parallels (the northern and southern boundaries of the map) represents the meridian of longitude λ (east).

A modification of this procedure for someone who wanted to represent an entire hemisphere would be to let the northern and southern boundary arcs shrink to the poles and for the middle arc take the equator, represented now by a straight line bisected by the central meridian and divided according to the same scale as that meridian. The point corresponding to longitude on the equator determines, with the poles, a unique circle whose arc containing these three points represents the circle of longitude λ. As for the circles of latitude these, in Ptolemy's map, divide the central meridian into segments whose differences are equal to the differences in latitude. In al-Bīrūnī's map this property is made to hold not only for the central meridian but for the bounding semicircles of longitude $\lambda = 90^{\circ}$ (east and west) as well, recognizing of course that the scale there will be larger than that on the central meridian by a factor of $\pi/2$. Again, for each parallel of latitude, this requirement defines three fixed points through which the curves representing parallels of latitude must pass so, borrowing the idea for the circles of longitude, al-Bīrūnī used circles for these curves as well.

Certainly al-Bīrūnī knew of Ptolemy's *Geography* for he refers to it in his treatise by way of introducing the mapping used by Marinos of Tyre. Further, that the Arabic version of the *Geography* contained Ptolemy's description of his mappings is likely since these are used in existing Arabic maps. (See the examples in the maps reproduced by Fischer, [11, *A et B**].) Thus it seems that al-Bīrūnī knew of these mappings and, in light of the relationship we have described between his mapping and Ptolemy's second mapping, our conjecture that he devised his projection as a modification of Ptolemy's is a reasonable one. It is also likely that the reason al-Bīrūnī did not mention Ptolemy's mappings is that in this treatise he is only interested in mappings that will represent a full hemisphere, and manifestly Ptolemy's maps will not do that. Indeed it is our conjecture that it was precisely the need to represent a full hemisphere that led al-Bīrūnī to modify what Ptolemy calls the better of his two mappings and so to arrive at a map of a full hemisphere.

7. The Distortions in al-Bīrūnī's Mapping

It is, as al-Bīrūnī himself remarks, impossible to represent exactly the surface of a sphere on a plane. The stereographic projection used in the astrolabe,

Altough Suter calculated the differences in the radii of the corresponding images, a better measure of the divergence between the two mappings is how far apart the corresponding circles get within the map. It is clear that this maximum occurs on AG or BD and we have calculated (see Fig.5) the segment SR, which measures the distance between the points where al-Bīrūnī's image and the stereographic image of a circle of longitude $GP = x$ (expressed in radian measure) cross the east-west line. Since the segment $OS = \tan(x/2)$ and $OR = 2x/\pi$ it follows that the segment $SR = f(x) = 2x/\pi - \tan(x/2)$. This function obtains a maximum when $\cos^2(x/2) = \pi/4$, i.e. when $x = 2 \text{ arc cos } \sqrt{\pi/4} \approx .96$. This yields a maximum value for the function f of about .09. Thus the maximum difference between al-Bīrūnī's projection and the stereographic projection of circles of longitude is about 9% of the total radius and al-Bīrūnī's circles are pushed considerably towards the bounding circle as compared to the stereographic circles.

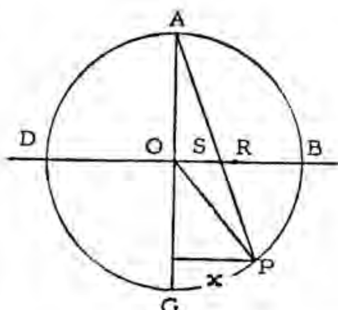


Fig. 5

Futther evidence that al-Bīrūnī would not have looked to the stereographic projection for inspiration for a good star map is given by his own words in the section describing map projections in the *Chronology*, [3, p. 357-8] He writes there, "But it is not the purpose of the astrolabe to represent them (the lines, circles, points on the globe) as agreeing with eye-sight . . . On the other hand, the purpose of the representation of the stars and countries (on even planes) is this, to make them correspond with their position in heaven and earth, so that in looking at them you may form an idea of their situation...". In view of al-Bīrūnī's clear perception of the different purposes of the astrolabic and cartographic projections it seems unlikely he would have looked to the former to find inspiration for the latter.

Our conjecture is that the projection al-Bīrūnī describes is in fact a simplification of the second conic projection that Ptolemy describes in his *Geography*. This second projection has been analyzed by Hopfner, [18, pp. 100-105] and, following him, by Neugebauer [20, pp.883-885], where the reader may find a detailed description of Ptolemy's projection. For our purposes it suffices to say that Ptolemy's idea is to use three concentric circular arcs to represent three parallels of latitude and a straight line bisecting all three arcs to represent the central meridian. The two intervals between the arcs on the central meridian as well as the arcs themselves have lengths calculated to insure

21:20-21. The three sources of star tables mentioned here are the same as those mentioned in the *Chronology* [3, p. 358], though the warning given there about taking into account the amount of precession is not repeated here.

21:22. As Suter indicates [29, p.91] it is not certain whether the title *Geography* refers to Ptolemy's work or not.

21:26. The books on *masālik wa-mamālik* were works giving routes and distances between places, of use for postal authorities. The earliest known writer on the subject was Ibn Khordādhbeh, postmaster at Sāmarrā, who wrote, according to Suter's note on this point, around 845. Al-Bīrūnī in [5, p. 14] speaks of "the method of al-Jaihānī and others in their books on *al-masālik*". In his commentary on this work [13, p.3] E. S. Kennedy identifies al-Jaihānī as Abū ʿAbdallāh Muḥammad b. Aḥmad al-Jaihānī who flourished perhaps around 920. These books had a long tradition and Ḥājī Khalīfa, who died in 1657/58, lists in his bibliographical lexicon the *ʿilm masālik al-mamālik*, referring it to the results of geography (see E. Wiedemann [33, II, pp.459-60]).

21:27. The coloring of maps seems to go back at least to the very earliest Arabic maps, for Wiedemann [33, I, pp.66-67] in a note quotes from Masʿūdī as follows; "In Ptolemy's *Geography* the seas are represented with different colors and are distinguished according to size and form . . . but their names are, in this work, Greek and therefore difficult to understand". This last phrase does not necessarily mean he had seen a Greek map but only an Arabic copy with the Greek names transliterated, hence still "Greek".

22:3-4. The Arabic here, (*maqāla fī taṣḥīḥ*), exactly fits the beginning of the title given as II.4 in al-Bīrūnī's list of his own works, translated by E. Wiedemann [33, II, P.492], namely *Eine Abhandlung über die Verbesserung* (*Richtigstellung*) *der Länge und Breite für die bewohnten Orte der Erde*. We know of no existing copies of this treatise.

6. The Source of al-Bīrūnī's Projection

In his commentary Suter made the suggestion that al-Bīrūnī's projection "ist eine abgeänderte oder vereinfachte stereographische Projektion" [29, pp.92-3] and made some sample calculations of the radii of the images of the circle of latitude of 60°, under the assumption that the radius of the sphere is 1. He found that the image in al-Bīrūnī's projection has radius .725 while that of the stereographic projection has image .577. The corresponding figures for the circle of longitude 60° are 1.08 and 1.15. In fact the percentage differences (26 % and −6 %) seem to us rather large and a slightly different analysis shows how far al-Bīrūnī's projection is from a stereographic projection.

where the author reminds us that not only $A/B = C$ but A is equal to X and B to Y. The analysis now proceeds as follows, (see Figures 2 and 3). If $HK \perp AE$ then (by Euclid III: 35,36) $ZA \cdot ZG = BE \cdot ZH$ and so $AZ \cdot ZG / BZ = ZH$, where $AZ = | ZE - 90 |$ and, in the case of Figure 2, $ZG = AZ + 180$, while in the case of Figure 3, $ZG = 180 - AZ$. Then $ZH{:}HK = ZB{:}BE$ and so $ZH \cdot (90 = BE) \;/\; (ZB = R) = HK = \text{Sin}_{90}\ AH$. Hence $\text{Sin}_{60}\ AH = \text{Sin}_{90}\ AH - (1/3)\,\text{Sin}_{90}\ AH = 40'\,\text{Sin}_{90}\ AH$ and then $AH = \text{arc Sin}_{60}\ (\text{Sin}_{60}\ AH)$. Thus $AH = \text{arc Sin}_{60}\ (40' \cdot ZH \cdot 90/R)$, which will be measured in the direction of B when Z is outside the given circle and in the direction of D when Z is inside. The first case will occur when $ZE > 90$ and the second when $ZE < 90$, while when $ZE = 90$, Z falls on A.

19:24-20:6. To find (see Fig, 4) the center of the circle of latitude, MTL, we drop ($MS = \text{Sin}\ MD$) and note $SE = \text{Sin}\,(90^{\circ} - \text{MD} = \text{AM})$. Changing to a nonagesimal scale $SE = (3/2)\ \text{Sin}_{60}\ AM$, $\text{SM} = \frac{3}{2}\ \text{Sin}_{60}\ DM$, and then $TS = SE - TE$. Letting R be the radius of the circle of latitude, $\overline{MS}^2 = TS \times (\text{SZ} + \text{R})$ and so $SZ + R = \overline{MS}^2 / TS$ is known. Thus since we also know TS we may calculate R by the identity $R = \frac{1}{2}\ TS + \frac{1}{2}\,(SZ + R)$, while $ET + R = EZ$ is the distance between the centers, again a formula not given in the *Chronology*.

20:7-20:12. As al-Bīrūnī remarks, the calculation of HD for the circles of latitude is exactly the same as calculating AH for the circles of longitude, so it requires no further comment, although he goes into it in detail both here and in the *Chronology* (p.364).

20:13-19. To complete his calculation of DH al-Bīrūnī must show that the point H is always measured from D in the direction of A, i.e. that the centers of the circles of latitude lie outside the given circle. He first remarks that $DT{:}DE = DM{:}90^{\circ}$, which is the defining property of the points M and T. Then, he says, $DM{:}90^{0} < \text{Crd}\ (DM){:}\ \text{Crd}\ 90^{0}$, which is immediate from the general theorem used by Ptolemy in the *Almagest* [21, p. 33] saying that if α and β are arcs of the same circle, with $\alpha > \beta$, then $\text{Crd}\ \alpha : \text{Crd}\ \beta < \alpha : \beta$. Thus, since $90^{0} > DM$, $DT{:}DE < \text{Crd}\ DM{:}\ \text{Crd}\ 90^{0}$ and since $\text{Crd}\ 90^{0} > DE$ it follows that $\text{Crd}\ DM > DT$. This, as al-Bīrūnī sees, immediately implies that no circle with center D could pass through both M and T and *a fortiori* (since the sum of two sides of a triangle is greater than the third) that no circle with center *between* D and E could pass through M and T.

21:1-21:11. It is possible that al-Bīrūnī is recommending this method of projection only for a given constellation since he says that the two stars chosen as a base are to be from one constellation (21:3). For further comments on this projection see Section IV.

have said here "*a plane surface bounded by straight lines*" for he would presumably have known of Archimedes' result in the *Sphere and Cylinder* (I, Proposition 33) that any sphere has surface area equal to four times that of its great circle. However, even with this provision the reasoning is a bit loose since if the lack of a rational ratio of the given surface to a plane, rectilineal surface were the key to the difficulty then the difficulty would also be present for the surface of a cone, and that is not the case since it may be cut along one generator and laid out flat.

17:16-20. This suggestion of making a second pair of maps, in which the equinoxes are at the centers, does not occur in the *Chronology*.

17:21-23. The use of different sizes to represent the brilliancy of a star is referred to in the *Chronology* in connection with the melon-form projection.

17:24-25. The use of colors to represent the temperaments of the stars is not mentioned in the *Chronology*, but many *zījes* had tables of the temperaments.

18:6-8. According to Luckey [16, p. 501], "al-Mahānī adds to the graphical solution of two of his problems a calculational solution introduced by the words: A procedure hereto through calculation (*bāb dhālik min al-ḥisāb* .... As is known Ptolemy in *The Analemma* sets the corresponding calculational (procedure) alongside the constructive procedure". Such a calculational procedure for the map would certainly be of some utility, for to construct the centers of the circles of longitude or latitude of low degrees by ruler and compass would lead to very flat intersections and a real problem with precision.

18:9-21. Given the circle $ABGD$ (in Fig. 2) with radius $EB = 90$ and a circle of longitude, DTB, with $TE = \lambda\ (0 < \lambda < 90)$ it is required to find TZ (the radius of the circle of longitude, which we denote by R)and EZ the distance between the centers of the given circle and the circle of longitude. In the circle of longitude the chord BD is perpendicular to a diameter at E, dividing it into two parts λ and $EZ + R$. Hence $\overline{EB}^2 = \lambda(EZ + R)$ and so $8100/\lambda = EZ + R$. Since $EZ = R - \lambda$ adding λ to the quotient yields $8100/\lambda + \lambda = 2R$. Thus, though this is said only in the *Chronology* [3, p. 361] and not here, $R = 8100/2\lambda + \lambda/2$. Also, subtracting λ from this yields $8100/2\lambda - \lambda/2 = EZ$, the distance between the centers of the given circle and the circle of longitude λ, though the *Chronology* [p.361] states "we can dispense with the knowledge of the distance between the two centers".

19:1-17. Presumably al-Bīrūnī is interested in determining the arc AH because the line joining B and H will then intersect EA (extended if need be) in the center of the circle of longitude and so provide one more way to find these centers. In the following account of al-Bīrūnī's derivation of AH, notation like $(A = X) / (B = Y) = C$ is used to reflect faithfully the Arabic text

11:13. Sezgin does not list any book by al-Bīrūnī having this title though al-Bīrūnī in [5, p.14] tells of making a large hemisphere 10 cubits in diameter to derive coordinates from distances.

12:11-19. Al-Battānī's crude method for finding the *qibla* has received ample comment in the modern literature on the subject, e.g. in King, [15], and there is no point in paraphrasing here al-Bīrūnī's description. In his forthcoming paper "Some Early Islamic Approximate Methods for Determining the *Qibla*", King points out that the value of the *qibla* obtained from a Marinos-type projection differs from that obtained by al-Battānī's method; so al-Bīrūnī must have been classifying them together only on the grounds that both represent meridians and latitudes by parallel straight lines.

13:4-15:11. This section, which follows the generalities introducing the treatise, is al-Bīrūnī's "review of the literature". In a previous section we discussed all the projections mentioned by al-Bīrūnī and we only add here that apart from the order and the concluding section on al-Ṣūfī's non-mathematical mapping the projections he mentions are the same as those discussed in the corresponding section of the *Chronology*, [3, pp.357-59]. The only differences are : (1) The discussion in the *Chronology* gives exact descriptions of the cylindrical and melon-form projections (through it does not use the phrase "melon-form") whereas the present treatise describes them mainly in terms of their defects and gives more historical detail on the "melon-form". (2) In the *Chronology* the 10th Century scientist Abū-Ḥāmid al-Ṣaghānī is named as the one who wrote on the projection of a sphere from a point on the axis but not a pole, described in (13:10-13) of this work. This must be al-Ṣaghānī's *K. fī kaifīyat tasṭīḥ al-kura ʿalā saṭḥ al-asṭurlāb*, published in *Risā'ilu mutafarriqa fī'l-hai'at li'l-mutaqaddamīn wa-muʿāṣirī'l-Bīrūnī*, Hyderabad, 1948. (3) In the *Chronology* he speaks of the cylindrical projection as one "which I do not find mentioned by any former mathematician" whereas in this treatise he explicitly mentions al-Farghānī in (14:18) where he says, "As for the cylindrical projection it is what comes to mind from the abundance of drivel that al-Farghānī spewed forth on it ... .". It would be tempting to see here further evidence that this was written after the *Chronology*, when he had learned of al-Farghānī's book. However in the *Chronology* he refers to "my book, which gives a complete representation of all possible methods of the construction of the astrolabe" and in this book, which can only be the *K. istīʿāb al-wujūh al-mumkinat fī ṣanʿat al-asṭurlab*, he refers to al-Farghānī's book *al-Kāmil* (see the sections translated by Wiedemann and Frank [33, II, p. 522]. Thus since al-Bīrūnī had seen al-Farghānī's treatise when he wrote the *Chronology* the meaning of the sentence about the cylindrical projection not being "mentioned by any former mathematician" must be that the *name* "cylindrical projection" was coined by al-Bīrūnī. (15:1) Al-Bīrūnī ought to

been constructed on a scientific basis. Such a study could illuminate the questions of the influence of al-Bīrūnī's treatise as well as providing a case-study of the relation between theory and practice in medieval Arabic science.

5. Additional Commentary on the Text

A question that has occasioned some debate has been that of the date of composition of the treatise. The only internal clue is the preface which speaks with fulsome praise of the (unnamed) Khwārazmshāh, and Suter takes this to refer to the Khwārazmshāh Abū'l-'Abbās Ma'mūn whose patronage al-Bīrūnī enjoyed from about 1004 - 1017 A. D. In assuming Ma'mūn is the Khaārazmshāh intended Suter ignores the earlier Khwārazmrhāh who was al-Bīrūnī's patron until he was overthrown in 995 A.D. Suter's other reason for supposing this treatise was written after the year 1000 A.D. is that while much of its contents can be found in the *Chronology* [3, pp. 357-64], published circa 1000 A.D., that book contains no reference to the present treatise, which must therefore have been written later. This argument, however, is unconvincing since it obviously cuts both ways.

On the other haud, Rozenfel'd, Rozhanskaya and Sokolovskaya in [26, p. 265] date the treatise to 995 A.D., but without giving any reasons. Thus it would have been written as late as possible (since al-Bīrūnī fled in 995) during the reign of the earlier Khwārazmshāh.

In fact it is not hard to decide between these two views on the basis of a remark in al-Bīrūnī's introduction to the section in the *Chronology* where he discusses his mapping. It is not just, as Suter says, because he makes no reference to this treatise in the *Chronolgy* but rather because he states positively in the *Chronology* [3, p. 357] that he does not know of "any special treatise on the subject (of star maps)". It is hardly possible that in writing these words at the age of twenty-seven he had entirely forgotten about a substantial treatise he had written at the age of twenty-two devoted entirely to the subject of star maps. On the other hand the treatise *Projection of the Constellations* makes no mention of its being a pioneer in this area and simply introduces the new map with the words, "Thus I say: If I want to copy the constellations on a flat plane . . . ", (15:15-16).

Hence it seems fairly safe to suppose that the Khwārazmshāh to whom the treatise is dedicated is Abū'l-'Abbās Ma'mūn and that, the substance of the treatise being near at hand in his *Chronology*, al-Bīrūnī was able to add two new mappings, briefly described, to produce soon after 1004 A.D. a new treatise to dedicate to his new patron.

In the remainder of our commentary we discuss points raised in the text of this treatise, introducing each by the page and line number where it occurs. We have tried to give, along the way, a comparison of the present text with that of which it is an expanded version, namely the closing section of the *Chronology*.

distorted as one moves to the boundaries and the poles of the map, with the worst distortion occuring in the polar regions near the boundaries. (See Fig. 6). Al-Bīrūnī does not make any criticisms of this projection.

7. Projection by great-circle distances from two fixed points, 21:1-21-11. (This is the modern "doubly-equidistant" projection described in *DA*, pp.176 and 202, where it is remarked [p.202] that "apparently no map of this kind has ever been constructed".) Again al-Bīrūnī does not criticize this mapping.

8. Projection by rolling a sphere on a tangent plane and forth through a fixed point, 21:12-21:17. (This is the azimuthal equidistant projection described in *DA*, p.175 and is simply (3) of our list with the pole replaced by an arbitrary point. Equally - spaced straight lines through the point represent the great circles through that point, so azimuths from that point are faithfully represented, and great circle distances from this point on the sphere are faithfully represented on these lines. *DA*, p.175, names, G. Postel as inventor of this projection in 1581 but, as al-Bīrūnī's treatise shows, Postel was over 500 years too late to be credited with its invention. Prof. E. S. Kennedy has pointed out to us that this projection is very close to al-Bīrūnī's first projection, (6) of our list, in the sense that the lines representing meridians and parallels in this projection, while pretty clearly not circles, are very close to the corresponding circular arcs used by al-Bīrūnī in (6). Thus led ρ be the length of the radius vector $\vec{r}$ from the center of the map to the curves of latitude or longitude 45°, $\vec{r}$ making an angle of 30° with the central meridian. Kennedy has communicated to us the results in the following table, where the calculations are made using 1 for the radius of the whole map.

	Globular Proj.	"Rolling Proj."	% Difference
45° Parallel	$\rho = .620$	$\rho = .608$	2.0
45° Meridian	$\rho = .693$	$\rho = .704$	-1.7

That the difference is so slight may be the reason why, in H. S. Roblin's *Map Projections* [25, pp. 46-48], the directions given for drawing the azimuthal equidistant projection, for a point on the equator, are in reality directions for drawing al - Bīrūnī's globular projection.) Al - Bīrūnī does not comment on the defects of his mapping.

For further details of the history of some of the above projections the reader should consult Fiorini, [9] and [10].

Conclusions: If we disregard the one non-mathematical projection of (5) it emerges that al-Bīrūnī was in possession of at least seven different mappings of the sphere on the plane, all admitting an exact mathematical description, and one of these, (2), admits an infinite number of variations. In addition, as we will argue later, he knew of the three mappings Ptolemy describes in the *Geography*, i.e. the two conical and the third, perspective, representation. This brings the total to ten different mappings with a wide variety of properties, which could have furnished a rich storehouse for Muslim cartographers of succeeding centuries. To what extent this store of mappings was in fact exploited awaits a survey of the surviving maps now housed in manuscript collections around the world, (for some references to these maps see Wiedemann, [33, I, p. 67] studying the projections used on those that appear to have

and straight lines through it project points on the sphere onto a plane, 13-8-13:20. (When the center of projection is on the sphere we have a stereographic projection, called "polar" in case the fixed point is a pole of the sphere and "meridional" in case the point is on the equator. See *DA*, pp. 37-38 and 157-58). In case the point of projection is not on the sphere but inside it or outside the point is one of the perspective projections which are discussed in detail in Driencourt and Laborde [8, Vol. I, pp. 102-107]. The case when the point is the center is the well-known gnomonic projection. Al-Bīrūnī objects that it does not well-represent the heavens as they appear to the eye and, in particular, it does not map equally-spaced circles to equally-spaced circles.

3. The melon-form projection (*mubaṭṭakh*) due to al-Kindī or al-Marwarrūdhī and described by al-Farghānī in his book *al-Kāmil*, 13:21-14:17. (This projection is described by Wiedemann and Frank in [33, II, pp. 524-25] and is called by modern cartographers the polar azimuthal equidistant projection. See *DA*, pp. 155-56 and p. 43. Meridians radiate in equally-spaced straight lines from a pole and parallels of latitude are represented by equally-spaced circles, concentric at the pole. Clearly azimuth at the pole and distance from the pole are faithfully represented, but nothing else is.) Unless we allow great widening of images the zodiac will be sliced into two halves, and it is exactly in this region where the most important figures lie. However al-Bīrūnī disassociates himself from the severest critics of this projection and says he plans to write a treatise on it, though no treatise by him on this subject is known beyond a chapter in his *Thorough Treatment of All Possible Methods for Construction of the Astrolabe*, partially translated by Wiedemann and Frank in [33, II, pp.522-532].

4. Cylindrical projection of the whole celestial sphere onto the plane of the equator or of any other postulated great circle, 14:18-14:26. This is described more thoroughly in *The Chronology* [3, pp. 357-8] where al-Bīrūnī makes it clear that a given star is projected from the sphere onto the foot of the perpendicular from the star to the assumed plane. (This is the modern orthographic projection as described in *DA*, p.42. Though often used for the surface of the moon it is hardly a good visual repre sentation of the celestial sphere as seen from the earth.) Al-Bīrūnī's two objections are that the practice of representing the whole sphere by this projection leads to a jumble of stars that "pile up on top of one another" and that stars near the circumference of the representing circle are very crowded together.

5. A method ascribed to al-Ṣūfī in which the stars are copied onto a piece of thin paper wrapped around the sphere which is then unwrapped to yield a map, 15-1-15:10. (This is the only non-mathematical projection mentioned by al-Bīrūnī and it has no counterpart in the modern literature. The nearest modern equivalent would be a polyconic projection, as in *DA*, pp.29-30, in which the sections of the sphere between two parallels of latitude are replaced by frustra of cones, whose surfaces may then unwound onto a plane). Al-Bīrūnī correctly remarks that this method is, as a practical matter, not too bad for small areas of the globe.

6. The "circular" projection, in which meridians and parallels are represented by arcs of circles, 15:16-20:20. (This is called by modern writers the globular projection, or Nicolosi's projection, after Gian Battista Nicolosi who, as Fiorini pointed out in [10, p.294], printed a map based on this projection in his *Ercole Siculo* of 1660. The well-known English cartographer Aaron Arrowsmith printed maps of the world based on this projection in 1794, as is mentioned by Tooley in [31, p.57]. According to *DA*, pp. 158-59, this globular projection is a "method of projection more frequently used [than the stereographic meridional projection] by geographers for representing hemispheres, though in the globular representation, nothing is correct except the graduation of the outer circle and the direction and graduation of the two diameters; distances and directions can neither be measured nor plotted. It is not a projection defined for the preservation of special properties, for it does not correspond with the surface of the sphere according to any law of cartographic interest, but is simply an arbitrary distribution of curves conveniently constructed". On p.54 of this same source there is an illuminating comparison of a man's head drawn carefully onto a hemisphere in al-Bīrūnī's globular projection and then plotted, maintaining latitude and longitude, in orthographic, stereographic and Mercator's projections. In a later section we present a detailed study of the distortions inherent in al-Bīrūnī's projection, but suffice it to say here that scale, angles, and area are progressively more

here. Abū Saʿīd Aḥmad b. Muḥammad b. ʿAbd al-Jalīl (al-Sijzī) (12:21 and 15:1) who died in 1024 A.D. was a geometer and astronomer whose astronomical works have not received study in modern times. Although a letter of al-Bīrūnī to al-Sijzī on Ḥābash al-Ḥāsib's analemma for finding the *qibla* has been tranlated by E. S. Kennedy and Y. ʿId [14] al-Sijzī's own treatise on the subject of the *qibla* has not been found. Abū (Naṣr) Manṣūr ʿAlī b. ʿIrāq (12:21-22), a Khwarazmian prince and teacher of al-Bīrūnī who wrote important scientific works, was the author of a work on the *qibla* of which no copy is known. Abū Maḥmūd Ḥāmid b. al-Khiḍr al-Khujandī (12:22) was a major astronomer of the latter half of the 10th Century whose book on the *qibla* has not been found. Abū'l-ʿAbbās (Aḥmad b. Muḥammad b. Kathīr al-Farghānī) (13:21, 14:4 and 14:18) was active in the mathematical sciences during the middle third of the ninth century. The work al-Bīrūnī cites here has for its full title *The Complete (Book) on the Making of the Northern and Southern Astrolabe and their Explanation by Geometry and Arithmetic* and has been studied by E. Wiedemann and J. Frank. (Abū Yūsuf) Yaʿqūb b. Isḥāq (b. al-Ṣabbāḥ) al-Kindī (13:22) is the well-known ninth century Arab polymath who wrote, among numerous other works, the book cited here and probably titled, *The Book of the Construction of the Astrolabe* (see Sezgin [28,VI, p. 154]). In the second half of the ninth century lived (ʿUmar b. Muḥammad b.) Khālid al-Marwarrūdhī (13:23). The lost work referred to here is probably his *Book of the Making of the Plane Astrolabe.* Who Ḥasan (14:1) was is not at all clear.

4. Mappings Mentioned in the Text

This section contains a survey of the projections al-Bīrūnī mentions in the *K. tasṭīḥ*. Since we have not taken into account the mappings described by al-Bīrūnī in [2] we make no claim that this is a complete catalogue, but provide this list only in order that the reader may have conveniently at hand some projections known to a scholar of such matters around the year 1000 A.D. For each projection we identify it by its description by al-Bīrūnī and the place in the text where it is mentioned, followed (in parentheses) by its modern name and a reference to a discussion of its properties in the modern literature. The abbreviation *DA* refers to the work of Deetz and Adams, *Elements of Map Projection*, [7]. The reader should however be aware that there is wide variation in modern usage in naming projections. For an attempt to put some order into the chaos see Maling, [17]. Finally we summarize al-Bīrūnī's objections to the projection. (We should add that we use the words "mapping" or "projection" interchangeably to denote any function from the surface of the sphere onto the plane.)

1. The projection of Marinos of Tyre as described by Ptolemy in his *Geography*, 11:20-12:9. (Modified cylindrical equal-spaced projection, *DA*, pp.31-33). This projection distorts lengths of latitudes and represents the (non-parallel) meridians by parallel lines.

2. The conical projections, where a point is taken on a diameter (possibly extended) of the sphere

17:5. *one hundred and seventy-nine degrees.* The text's *wa huwa mi'at wa sab'a darajat* is bracketed by Sa'īdān as a copyist's insertion and is, in any case, wrong.

21:5. *ḥarf ḥalqatin min ḥalaqi al-kurati al-'iẓām.* The text cannot support Suter's translation ". . . daß du an je zwei der Sterne ein biegsames Lineal (einen Papierstreifen) anlegst, das sich also an einen Großkreis der Kugel anschmiegen kann, . . . ", though the method Suter describes might be a convenient way to carry out what al-Bīrūnī asks.

21:16-17. *illā mā bayn muthabti al-juz' alladhī lā yatajazza' wa bayn nafātihi.* We infer from the context that the meaning of this phrase is that the deviation between the representation of the sphere by al-Bīrūnī's third method and the "true" sphere is so slight that any distinction between the two is of only theoretical interest and has no more practical importance than the issue of whether there are indivisible parts or not.

3. Biographical Commentary

For the persons mentioned in this treatise we provide some bio- and bibliographical information based primarily on the material in Sezgin, [28], which the reader may consult for further details. We provide the full name, as given by Sezgin, enclosing in parentheses those parts of the name not cited by al-Bīrūnī. Immediately following the name parentheses enclose the page and line numbers in this treatise where the person is mentioned. The information following this is, on the whole, restricted to what is known about the work to which al-Bīrūnī refers.

'Uṭārid b. Muḥammad (al-Ḥāsib), (11:3), was a mathematician and astronomer of whose life nothing is known. Besides two surviving works on burning mirrors (see Toomer [32, pp.20-21] for further details) and on stones he wrote several works, which have not survived, on astronomy, including the one cited here by al-Bīrūnī. (Abū Ḥafṣ) 'Umar b. al-Farrukhān al-Ṭabarī (11:3), who seems to have flourished in the second half of the 8th Century, is known primarily as an astrologer. Abū'l-Ḥusayn ('Abdu'l-Raḥmān b. 'Umar b. Muḥammad b. Sahl) al-Ṣūfī (11:4, 15:1-2, 15:5 and 21:20) carried out careful studies of the positions of the fixed stars (903-986 A.D.). The work cited by al-Bīrūnī exists in numerous manuscript copies, three Persian translations (one by Naṣīr al-Dīn al:Ṭūsī) and two 19th Century French translations. (Claudius) Ptolemy (11:20), who is here cited as the author of the *Geography* (12:1 and, perhaps, 21:22) , flourished in Alexandria around 135 A. D. and wrote *The Almagest*, which is cited in this treatise at 15:6 and 21:20. Marinos (of Tyre) (12:1) wrote on geography around 110 A.D. (Abū 'Abd'allāh) Muḥammad b. Jābir (b. Sinān) al-Battānī (12:11 and 21:21) who died in 929, was the author of the *zīj* which has been edited and translated into Latin by C. A. Nallino. It is the section of this *zīj* on the *qibla* that al-Bīrūnī cites

translates this as "auch noch die Entfernung [von Mekka bis zum Beobachtungsort]" since that is not what al-Battānī did (see [19, pp. 206-7]) and al-Bīrūnī's words here do not imply this.

13:7. *mujassamāt nāqiṣa*. Suter's translation and explanation, "unvollkommener Körper (d.h. deren Grundflächen nicht' Kegelschnitte, sondern unklassifizierte Kurven sind)" is a possible one but in the absence of other appearances of the phrase it is hard to be certain of what al-Bīrūnī intended by the word *nāqiṣa*, one of whose uses is to describe the ellipse in the phrase *qaṭʿ nāqiṣ*, and so we cannot be sure of what projections al-Bīrūnī was referring to here.

13:23-14:1. *asṭurlāban mubaṭṭakhan*. With Suter we have preferred this reading to that of *mubaṭṭaḥan*, chosen by Saʿīdān. Suter does not cite al-Bīrūnī's own use of the phrase in the *Astrology*, "There is [among the types of astrolabes] the *mubaṭṭakh*, called so because the muqantaras and the zodiac circle are flattened into an elliptical form like a melon", [4, p.198].

14:1. There seems to be no reason to change the manuscript's reading of *wujida li-Ḥasan* to Saʿīdān's *wajadnā lahu*.

14:1-2. *wa-aṣḥāb hādhihi'l-ṣināʿa fīhi farīqān immā mustamjin wa immā mustamḥin iyyāhu*. Suter has read the two words *mustamjin* and *mustamḥin* as if they referred to types of astrolabes, taking the root meaning of *majana* to be "thick" and noting the root according to dictionaries does not possess a tenth form. We prefer to take the root meaning of *majana* as "to scoff or mock" and both words as referring to the attitudes of the two parties the text mentions.

14:12. *tasṭīḥ al-mubaṭṭakh*. Here we have preferred Suter's reading *mubaṭṭakh* to Saʿīdān's *mubaṭṭaḥ*, for the objection al-Bīrūnī gives to this projection, namely that it cuts the ecliptic into two halves, is an objection that exactly fits the melon-shaped astrolabe as it is described in Wiedemann and Frank [33, II, pp. 524-5].

14:13 *li-ittisāʿ al-abʿād*: In changing the printed text's *al-infād* to *al-abʿād* we are adopting the suggestion of Lutz Richter-Bernburg.

14:19. *al-asṭurlāb al-mubaṭṭakh*. In view of al-Bīrūnī's earlier remarks about al-Farghānī and the melon-form astrolabe we have preferred Suter's reading here to that of Saʿīdān, *al-mubaṭṭaḥ*.

16:4. *naṭlubu*. In many cases we have read verbs as being in the first person plural rather than second person singular or the passive voice of the third person singular.

11:4. In his *Astrology* [4, p.86] al-Bīrūnī defines the *nau'* of a star as its heliacal rising and explains in his *Chronology* [3, p.339] that *nau'* is also the rising of a lunar station and that while the influence of its rising is called *bāriḥ* the influence of its setting is called again its *nau'*. A plural is *anwā'* and elsewhere in the *Chronology* [3, p.231] he refers to "all annual consecutive occurrences and also the meteorological and other qualities of the single days that experience has taught them (the Greeks and Syrians) in the long run of time, which are called *anwā'* and *bawāriḥ*". He also records Thābit b. Qurra's initial opinion that the *anwā'* occurred "one and the same day" everywhere and hence could not be related to the (heliacal) rising or setting of stars.

12:1. *'an mārīnus.* Sa'īdān notes the Arabic text reads *farbīyūs* but his emendation to *mārīnus* is certain (and Suter's reading, "Hipparchus", is wrong) in the light of Ptolemy's text, which does in fact ascribe the mapping to Marinos.

12-2-5. The transliterated text of Sa'īdān's edition reads (12:2) *min takhṭīṭ khuṭūṭ muwāziyat li-khaṭṭ al-i'tidāl wa iqāmatihā* (3) *maqām dawā'ir al-'arḍ a'nī aflāk anṣāf al-nahār wa takhṭīṭ khuṭūṭ muwāziyat li-khaṭṭ* (4) *nisf al-nahār* (MS has *li-khaṭṭ al-i'tidāl*) *wa iqāmatihā maqām dawā'ir al-ṭūl a'nī al-madārāt al-muwāziya li-mu'addal* (5) *al-nahār*. Suter neatly cut the Gordian knot presented by this tangled passage by translating these lines, "von der Zeichnung der zum Äquator parallelen Kreise und der auf ihnen senkrecht stehenden Langenkreise". This certainly catches the mathematical import of the passage but is hardly an accurate translation, since *iqāmatihā maqām* means "to put them in place (of other things)", i.e. simply to substitute one thing for another, and Suter's attempt to translate it as if it referred to perpendiculars ignores its proper meaning. Even Sa'īdān's emendation is only a partial improvement since it leaves uncorrected the *dawā'ir al-'arḍ a'nī aflāk anṣāf al-nahār* ("circles of latitude, i.e. the meridian circles") in line 3 and the equally contradictory *dawā'ir al-ṭūl a'nī al-madārāt al-muwāziya li-mu'addal al-nahār* in the following part.

If we take the emendation Sa'īdān made and assume the copyist's eye transposed the two explanatory phrases, each beginning with *a'nī*, then the passage makes perfect sense and may be translated as we have in our translation, even though other emendations are possible.

12:6-8. To avoid assuming the text is corrupt in these lines as well we translate *al-ṭūl al-kullī* simply as "the whole length" (of the map, from east to west) and *al-'urūḍ* as "the widths" (i.e. the lines measuring the width of this rectangular map, from north to south).

12:18-19. *fa istakhraja bihi ḥīna'idhin miqdār bu'd samtihi.* Suter incorrectly

written a treatise on (4) the correction (*taṣḥīḥ*) of that and the nature of the methods for knowing everything sought about them, but knowledge that will accomplish (5) that requires a long life, which people usually do not have, and authority that penetrates (6) the regions of the earth and means to distribute among its inhabitants, especially those trained in it (geography), for agreement in (helping in) that (endeavor) despite (7) whatever contemporary events might occur. Seldom does (all) that combine in one person (8) and especially in our present circles, so it is better to concentrate on the work of the ancients (9) and to devote (our) endeavor to the emendation of one thing after another on which suspicion falls, with whatever kinds (10) of corrections are possible.

For he who seeks everything will fail at everything and he who aspires to the extremes is unable (11) to attain them and inflicts on himself the calamity of the loss of his life and the spoiling of the endeavor and the loss of treasure. (12) The mean of everything is praised and is far from the two extremes of overindulgence or neglect. (13) And God the Exalted commends those who listen to (His) teachings and who follow its best (doctrine). May God make us one of those who (14) follow His pleasure and do not take their own desire as their God. May He provide us with the necessities of the two worlds. He is able to do what He wants, and He (15) knows (our) secret thoughts.

(16) The book of the projection of the constellations and making spheres plane has finished. (17) Praise to God, Lord of the worlds. (18) And God's blessings on our master Muḥammad (19) and on his family and all his companions (20) and may He grant (them) salvation.

2. Notes on the Translation

Title. . . *wa tabṭīḥ al-kuwar*. Wiedemann and Frank [33, II, p.527] suggest that we should read "*tabṭīkh*" for "*tabṭīḥ*", evidently seeing here a reference to the melon-form astrolabe (*al-asṭurlāb al-mubaṭṭakh*) which appears in this treatise. There is however no textual evidence for such a reading and we prefer to read the title as Saʿīdān has quite properly read it, *tabṭīḥ*.

10:9. *hay'at al-aflāk*. The spheres (*aflāk*) are the eight concentric celestial spheres containing the seven planets and the fixed stars, with the earth at the center.

10:16-17. *fī'l-mawālid wa-taḥāwīlihā wa-taḥāwīl sinī'l-ʿālam*. Al-Bīrūnī explains these phrases in his *Astrology* [4, Sec.249] where he writes that (1) a year is the return of the sun to the place where it was at its beginning, (2) a world-year (*sanat al-ʿālam*) is the return of the sun to the first of Aries and (3) a nativity-year (*sanat al-mawālīd*) is the return of the sun to its position at the time of birth. He concludes "and it needs the knowledge of that by which the ascendant is deduced, for the ascendant ("of the time determined by the sun's return" – Wright) is the ascendant of the anniversary (*taḥwīl*) of that year".

pass, and from these there is drawn on the assumed plane a triangle. Then (7) a subsequent star is taken on the sphere and it is compared to two of the three stars and a second triangle is made from that (8) and the measurements of its two sides are known and are taken from the ruler by the compass and there is drawn on that (9) base drawn in the first triangle a (another) triangle from those two quantities in their direction. Similarly, we construct (triangles) (10) until we finish all of the stars, so that the constellations are then represented on it (the plane). Moreover, on the sphere (11) each point forms with two other points a triangle so that what we mentioned (the procedure) will not trip up the workman.

(12) Also if he were to paint on the sphere on the places of the stars something that would leave a trace on that which touches it, then if the sphere is put (13) on the assumed plane in which the representation is to be and it is rolled on it with a circular movement (14) and it does not abandon the (original) place (i. e. always returns to it) and one takes care so that the rolling on it is in all (15) directions equally then the places of the stars would trace with what was painted on them their likenesses on the plane. (16) And when care is used in this last (method) there is nothing between what is obtained and the truth except what is between (17) conceding the part which cannot be divided and rejecting it.

(18) And the matter of representing what is on the terrestrial sphere is like what we mentioned about the stars, (19) point-by-point (and) there is no difference. As for the celestial sphere, tables of the fixed stars are needed for it (20) and the position of the Milky Way, from *The Almagest* or the book of Abū'l-Ḥusayn al-Ṣūfī or the *zij* (21) of Muḥammad b. Jābir al-Battānī and such works. (22) As for the terrestrial sphere one needs the information on latitudes and longitudes of localities from the book *Geography* (23) and (the coordinates of) villages, seas, rivers, sands, mountains, mines, (24) the ascents and declivities that occur, and other things so that its contruction in the plane will take (25) them into account.

(26) It has been customary for those authors of the books on routes and kingdoms who represent the earth (27) to color the seas pistachio-green, running waters with amber or sky-blue, (28) sands by saffron-yellow, the mountains with violet mixed with a little red, (29) the towns in square shapes, by cinnabar red, and the roads by a dust color or blackish. So let (30) the imitation by the agreement occurring between them (the real objects and their representations) be similar to what we mentioned.

(22.1) So if we are not able to get these two kinds of books we need to undertake the construction of their contents. (2) As for the observation of the stars it is by the armillary sphere and the instruments made for that (purpose) and as for things on the earth, (3) it is by the determination of the longitudes and latitudes of each (feature) sought on it and I have already

as we did for (8) circles of longitude. I mean that the ratio of DZ to ZH is as the ratio of AZ to ZB, so ZH will be known. (9) And the ratio of HZ to HK is as the ratio of ZA to AE, so HK [becomes] (*yaṣbiru*) known. Then one changes it to sexagesimal units (10) and enters it as an arc in the table of sines and there results the arc HD, (11) And just as we perform these operations for the circles of latitude in the half (circle) $ADGE$, so we will perform them also (12) in the half, $ABGE$. And that is what we aimed at.

(13) The centers of the circles of latitude always fall outside the circle, for the reason that where we want any (14) circle of latitude we lay down a section of the line DE (DT in Fig.4), a thing whose ratio to the line DE is as the ratio (15) of what it (the circle of latitude) cuts from the two arcs DA and DG to the quarter of the circle. And that will always be less than each (16) one of the two chords of those two arcs. So, if the center of that circle were the point D its radius would be (17) the chord of one of those two arcs, and so it would not pass through the extremity of the section taken from half (18) of the diameter DE; rather, it goes beyond it towards the direction of the point E. And (so) when it (arc LTM) passes over it (T) the center falls (necessarily) (19) outside the circle. And if the case of the point D (being the center of the circle of latitude) is impossible, how much more with the other (cases), that it is impossible that it be inside (20) the circle. And that is what we wanted to prove, God helping.

Fig. 4

(21:1) And for the representation of these constellations there is another method, which is also simple, and it is that a ruler is made (2) divided into one hundred and eighty parts, and on a level surface a straight line is drawn that one divides into these (3) parts. Then on the sphere (to be) represented two of the stars of some constellation are picked out and there is compared to them (4) a third star so that the distances between them become a triangle and the measurements of these distances are set down (5) by putting through each pair of stars of them (the three) the edge of a ring of the great rings of the sphere, and then their measurements are taken (6) from the ruler by the com-

we multiply ZH, which we kept, (9) by ninety, which is BE, and the whole is divided by ZB which is the radius of the (10) circle of longitude, and then there results HK which is the sine of the sought AH.

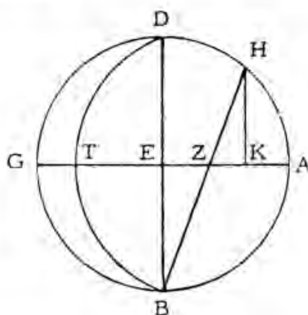


Fig. 3

(11) But these lines and sines and diameters which have been deduced for us are in a unit of which (12) the radius of the circle $ABGD$ is ninety parts and it is necessary this be changed to the sine (13) in which the radius of this circle is sixty parts so that when we enter the arc in a table of sines (14) there will result the arc AH, and that we accomplish by subtracting from it (HK) its third or we multiply it always by forty minutes (15) and it changes to sexagesimal units. (16) And this arc, i. e. AH, which is the arc of the intercept, will be in the direction of B when (17) the point Z is outside the circle (Fig. 2) and it will be in the direction of D when the point Z is inside, (Fig. 3).

The knowledge (18) of the position of the point Z using the relation of the distance between the two centers to the radius of circle $ABGD$: If the two are (19) equal the point Z is on top of A and the arc of intersection disappears; but, if (20) the distance is greater than ninety, i. e. AE, the point Z is outside (21) the circle and if it is less than ninety the point Z is inside the circle. (22) And certainly when we have determined those circles falling in the half (circle) $BGDE$ we know from these the half $BADE$.

(23) And so we now come to the circles of latitude and we repeat the circle $ABGD$ (Fig. 4) in which is the section (MTL) of the circle, (24) one of the circles of latitude, and we want to know about it what we know about the circle of longitude. Let (25) its center be Z, draw $AH[Z]$ (D) and drop a perpendicular MS, [the sine] (ḥaythu) of arc MD, and SE is the sine of its complement, (26) i.e. AM. And these two are known from the table of sines. We increase each one of them by (20:1) its half, or always take its product by ninety minutes, (so) it will change from a sexagesimal scale to (2) a nonagesimal scale. Then SE is known in this scale (of 90) and we take away ET. TS remains (3) (as) known. And the area, TS by the sum of SZ and ZT, is equal to the square of MS. So when we divide the square (4) of MS by TS there results the sum (of) SZ and ZT. And when we add half of TS to half the sum (of) (5) SZ and ZT it totals up to TZ, and it is the radius of the circle of latitude. And if we add ET to TZ it totals up to (6) the distance between the two centers.

(7) If, then, we want to know the arc HD, which is the intercept, we proceed

struction on knowing the measurements of the sizes of the circles, the distances of their centers from the center (9) of the postulated circle, and the intercepts of the lines (radii of these circles) (with) its circumference (i.e. *AH*).

(10) So once again we make a circle *ABGD* (Fig. 2) about the center *E* with two diameters *AEG* and *BED* and in it we put down (11) one of the circles of longitude, *DTB*. Let its center be the point *Z* and we draw *BZ*. It cuts (12) the circumference at the point *H* and we want to know *TZ*, the radius of the circle through (13) *B*, *T*, (and) *D*, and *EZ* which is the distance between the center of that circle and of the circle *ABGD*.

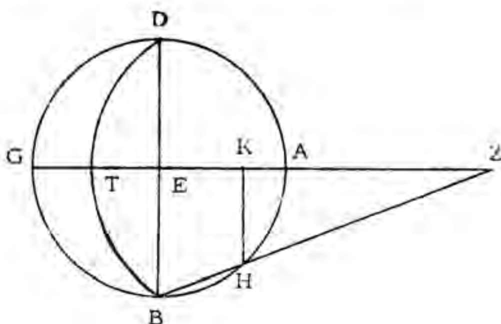


Fig. 2

(14) And so since each of *ET* and *TG* is known, because it is postulated, and the area, *TE* (15) by the sum of *EZ* and *ZT*, is equal to the square of *EB* so that when we divide the square of eight thousand one hundred, (16) i.e. the square of *BE*, by *ET*, there results the sum of *EZ* and *ZT*. So, if we add *ET* to the quotient (17) of the division it adds up to the diameter of the circle of longitude. When we subtract half of *ET* from half (18) of the quotient of the division, *EZ* is obtained, which is the distance between the centers.

(19:1) And as for the knowledge of the intercept, i.e. the (arc) distance between the two points *A* and *H*, we make the perpendicular (2) *HK*. (3) Thus, since the area *AZ* by *ZG* is equal to the area *BZ* by *ZH* the ratio of *AZ* to *ZH* will (4) be as the ratio of *BZ* to *ZG*. So when we multipply *AZ*, the excess of what is between the 90 parts (the radius) and the distance (5) between the two centers, by *ZG*, which is in the first picture (Fig.2) the sum of *A* [*Z*] (*D*) and one hundred (6) eighty parts and in the second picture (Fig.3) one hundred eighty from which *AZ* is lacking, and if we divide (7) the whole by the radius of the circle of longitude there results *ZH* and it is what is kept. (8) The ratio of *ZH* to *HK* is as the ratio of *ZB* to *BE* and so

equal to its distance from the beginning of Aries (one hundred and seventy-nine degrees) (6) dividing from the point *A*. And so we would end up at *Z* its degree, and the circle passing through it (7) is its circle of longitude. We count on it in a southerly direction, i.e. the direction of *B*, an (amount) equal to its latitude to *F* (8) and we say that it is the place of the assumed star. (9) And thus we do for each star whose degree is between the beginning of Aries and (the end of) Virgo so that (10) the copy of the half is completed. And we draw around each constellation its shape, which goes along with it, according to (11) what the locations of the stars making up its members necessitate.

(12) Then we repeat a circle like this one with which the representing (was done) and we make on it those constructions mentioned (13) and we assume it to be the half that is from the beginning of Libra to the end of Pisces and in it we assume (14) the point *A* as the beginning of Libra and the point *G* as the end of Pisces and we take the distances of the degrees of the remainder of the stars from (15) the beginning of Libra and we construct what we constructed (before) so that we obtain all of the constellations in two circles.

(16) And if we do not want the constellations to be chopped off at one of the two equinoctial points, which fall on the (17) edges of both of the two circles mentioned, then we draw, along with these two aforementioned circles, two other circles (19) in one of which we mark the point *A*, the beginning of the sign of Cancer, and we take the distances of the stars from the first (19) of Cancer, and in the other the point *A* is the first of Capricorn and we take the distances of the degrees of the stars from the first (20) of Capricorn and so out of these two we complete what is in the first two pictures.

(21) And the brilliancies of the stars are among what is mentioned in the (relevant) books so that will be what is indicated on their positions (22) according of their degrees (of brightness), after determining magnitudes suiting these points, in continuous succession (23) as befits the increase.

(24) And as for their temperaments we prepare pigments similar to the colors of the planets and then blend from these (colors) (25) for each planet according to what was mentioned of their temperaments and paint on the void, the empty spaces that remain between them, with *lapis* (18:1) *lazuli* similar to the bluish color seen in the heavens as far as the eye can see around (2) the celestial sphere. And our representation of the constellations will be over the *lapis lazuli* with white so that it will be (3) clearer to the sight. (4) When we have finished that we obtain what was sought as nearly as it can be from (these) methods. (5) God, the Exalted, permitting and willing.

(6) But some craftsmen incline to calculation and prefer it to constructive methods despite (7) all that we have found about it, (concerning the) methods of the maker of the astrolabe and instruments, and for that reason we will transfer what we mentioned to (8) methods of calculation and will give in-

the place of that star and a point is (made) on it (the place).

(25) And so in the illustration we have assumed a star whose distance from the beginning of Aries is one degree and whose latitude is (26) one degree north. Thus we have counted from the point *A* on the line *AEG* one division of (17:1) its divisions and we ended at the point *H*. And we said that this is its degree (of longitude) and the circle that passes through it (2) is the circle of its longitude. Then we counted on the circle of its longitude in the direction *D*, the north, one (3) of its divisions and we ended up at *O* and we say that *O* is the position of the star mentioned.

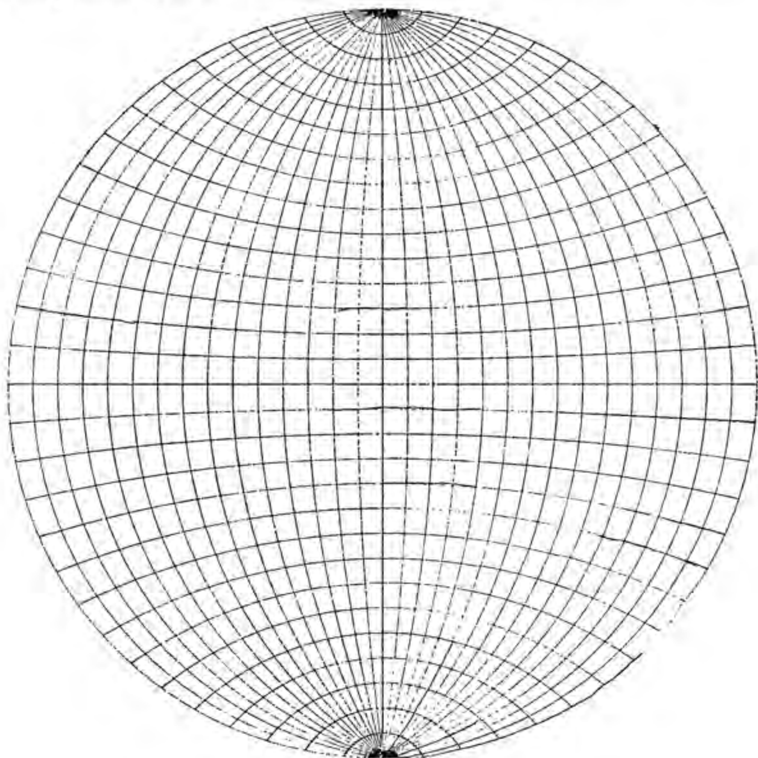


Fig. 6

(4) And similarly, if we had assumed a star at twenty-nine degrees of Virgo and its latitude in (5) the south one degree. We would count an (amount)

seek on each of the two lines *EA* (and) *EG* centers of circles (5) all of which pass through the two points B and D and through every [division of the divisions] (*quṭr min aqṭār*) of the diameter. We also seek on (6) each of the two lines *EB* (and) *ED* centers of circles that pass part-by-part through the divisions of the diameter (7) and through the similarly numbered parts of the circumference of both sides.

(8) Thus in the illustration (Fig.1) we have made *AH* one division of the ninety divisions of *AE* and we seek on the line (9) *EG* the center of a circle that passes through the points *B*, *H*, (and) *D*, and so when we have found it and have opened the compass that by (amount) we describe with it also (10) in the other direction a similar one so that it will be for example the circle *BZD*. These circles are called (11) circles of longitude.

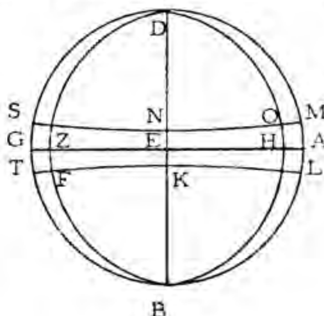


Fig. 1

(12) Then each of the two arcs *AM* and *GS* is assumed to be one of the parts (13) of the circumference (*quṭr*). We seek one of the parts of the diameter and we seek on the line *ED* the center of a circle that passes (14) through the points *M*, *N*, (and) *S* and so when we have found it and opened the compass by that (amount) we draw with it also in the southern direction (15) (one) similar to it, such as *LKT* and it will be its [corresponding circle] (*quṭraihā*) in the south. These circles are called (16) circles of latitude.

(17) So when we have done that to each part we have completed each of the circles of longitude and of latitude, one hundred (18) seventy eight circles (for each direction) not counting the two lines *AEG* and *BED* and the two lines of the circle *ABGD*. (See Fig.6, not in treatise, constructed for intervals of 6°.)

(19) Then you set forth every star whose degrees (of longitude) are between the first of Aries and the last of Virgo, (20) so that you count one degree from the beginning of Aries, and their equal is counted from the point *A* on the line *AEG* so that where the end is (21) will be its degree (of longitude). The circle of longitude passing through that degree is the circle of its longitude. Then you take (22) the quantity of its latitude and you count its equal from its scale on the circle of its longitude, from the parts into which the circles of latitude divide it: (23) If to the north then towards *D* and if to the south then towards B. And where (24) the counting comes to an end there will be

or southern, and with it it is possible to project the stars of the celestial sphere in their entirety in the plane of (22) the celestial equator or in the plane of any postulated great circle. (23) However, the northern and southern constellations are assembled all together in it and pile up on top of one another, (24) and the stars near the circumference of the circle of the plane representation are very much cramped together and they vanish, so that (25) perhaps some northern and southern stars are considered to be one in the view of the eye. As for those opposite (26) the center of the circle of the plane of representation, distant from its diameter, their occurrence (in the plane) is nearer the truth.

(15:1) I have heard Abū Sa'īd Aḥmad b. 'Abd al-Jalīl (al-Sijzī) the geometer, say about Abū'l-Ḥusayn (2) al-Ṣūfī that he had placed thin paper on the sphere and wound it on its surface so that it fitted it (3) neatly on its surface. Then he drew the figures on it and indicated the stars in accordance with their appearance (4) on the transparency. And that is a (good) approximation when the figures are small but it is far (from good) if they are large.

(5) And he, i. e. Abū'l-Ḥusayn, claims in passages in his book, and for a number of the figures, that they (6) are seen in the sphere differently from what is seen in the heavens, and that is because of an error in the tables of *The Almagest* from which (7) the sphere was made. So by my life, when this slight error is on the sphere barely perceptible (8) to sight how much less would one recognize it on the flat plane which does not conform with the domed (9) neatly unless some places of it are bent, contorted and doubled over, and when it returns to its evenness the bent becomes planarized and the doubled becomes separated.

(11) And if all the cases mentioned are of such great difference between what is seen in the sphere and (12) in the plane it is incumbent on us to make some device with which to reconcile the two viewings (of the plane and sphere). (13) But if the discovery of a rational ratio between a straight line and a circular line is impossible (14) and similarly it (a rational ratio) is absent between a plane surface and a spherical surface we are prevented from making (15) that as it is in reality.

Thus I say: (16) if I want to represent the celestial constellations on a level plane then we describe around the center E (17) the circle $ABGD$ for the half of the sphere which is from the beginning of the sign of Aries to the end of the sign of (18) Virgo and we quarter it with two diameters AG and BD. Let A be the beginning of Aries and G the end (16:1) of Virgo, B the south and D the north. We divide each of the four quarters of its circumference (2) into ninety equal parts and we also divide (each) of the four halves of the two diameters (3) into ninety equal parts. We produce these two diameters in their directions in a straight line outside (4) of the circle, indefinitely. We

them is not (17) according to the relationship of their distances in sight, unless the plane is tangent to the center of the constellation (18) intended (to be represented) and the vertices of the cones are beyond the tip of the diameter perpendicular to that plane, (19) and then the difference, in sight, is small, but whenever the constellation is closer to the vertex of the cone (20) the difference mentioned is more.

(21) It is possible to copy what is on the sphere onto the plane by another way, which Abū'l-'Abbās al-Farghānī attributed (22) in a number of manuscripts of his book called *The Complete* to Ya'qūb ibn Isḥāq al-Kindī (23) and in a number of them to Khālid b. ʿAbd al-Malik al-Marwarrūdhī. It is called (14:1) [melon-shaped] (mubaṭṭaḥ = flattened) and there is a short book of Ḥasan's on its making and the specialists in this art (2) are of two parties concerning it: either they scoff at it or they try it out. (3) As for those who scoff, they reject it fundamentally, so they refuse to have anything to do with the reply to its author and they are annoyed at him, (4) such as al-Farghānī. As for (the party) trying it, some claim the sphere may be imagined to be flattened at (5) one of the poles (and) cut at the other pole and some claim that between this astrolabe (6) and the projection mentioned there is nothing in common, but there came a flood of instruments for deriving the risings (7) and altitudes, such as the sun dials and others. (8) I am the third of these two parties, claiming about this astrolabe what I firmly believe, that it is a kind (9) of conical projection previously mentioned and I will make concerning its manufacture and demonstrations of (10) its validity a book later on if God, the Exalted, wills.

(11) But (for) now I say: (12) In the projection of the melon-shaped (astrolabe) only the representation of one of the two halves of the zodiac is possible, either (13) the northern or the southern, and the annexation of the other half to it is useless because of the wideness of the distances (14) every time you increase a little bit in the sphere, and overstepping the acceptable limit by its likeness in that. Then one must be content with (15) the representation of each of the two halves of the zodiac in a figure separately, and the greater the figures (16) with respect to advantage and the more of them in need of being seen, i. e. those running across the middle of the zodiac and (17) the celestial equator, it (the projection) cuts and divides into both of the two figures (the two separate representations of the northern and southern halves) and that is far from what is sought.

(18) As for the cylindrical projection, it is what comes to mind from the abundance of drivel that al-Farghānī spewed forth on it (19) at the end of his book on the refutation of the melon-form astrolabe, but I think that (20) I have beat him, and I have called it "the (cylindrical?) projection" for a reason that is out of place here. It is a kind of middle ground, (21) neither northern

the magnitude of the difference between the two latitudes – in a southern direction if the latitude (13) of Mecca is less than the latitude of the locality and in a northerly direction if it is greater than it. From the endpoint he drew (15) the line of latitude parallel to the east-west line. Then he took from the extremity of the north-south line which was in the direction (16) of the line of latitude (just drawn) the magnitude of the difference between the two longitudes (and measured it along the circumference of the horizon circle) in the direction of Mecca from the locality. He drew from (17) the extremity the line of longitude parallel to the north-south line and he claimed that that (point) of the line of latitude (which) the line of longitude intercepts (18) is the place of Mecca in the horizon plane, and so with it he deduced then the magnitude of the distance (19) of its azimuth. (20) And that way of constructing the azimuth of the *qibla* is a gross error which all of the scholars accused him of in (21) their books on the azimuth of the *qibla*, e. g. Abū Saʿīd Aḥmad b. Muḥammad b. ʿAbd al-Jalīl (al-Sijzī), Abū Manṣūr ʿAlī b. ʿIrāq, and Abū Maḥmūd Ḥāmid b. al-Khiḍr al-Khujandī.

(13.1) That prompts me to establish principles with which one may attain the two representations, of the stars and constellations in the celestial sphere (2) and of the countries, mountains, seas, rivers and other features in the terrestrial globe, (3) that he may build on them (the principles)I have set forth by that (treatise) and not (need to) rely on anything else.

Thus I say: (4) It is known to those interested in astronomical instruments and their construction, and inquiring into their true facts, (5) after investigating the science of astronomy and grasping the full portion of geometry, that circles and points (6) on the sphere are not copied onto level surfaces other than by passing through them straight lines and the surfaces (7) of cones, right and inclined, and the surfaces of cylinders, and the surfaces of deficient solids (*al-mujassamāt al-nāqiṣa*). (8) As for straight lines and the surfaces of cones, it is (the projection) by which is set up the construction (9) of the astrolabe. With the variation of the position of the vertex of the cones and of the starting point of those lines in the two directions (10) of the north or south the astrolabe becomes two types, the northern and the southern, but with the variation (11) of their positions (i.e. the positions of the vertices of the cones) on the axis of the sphere either at the two poles of the sphere or outside of it on the extension of the axis (12) the circles copied on it [the plane] are of various kinds: thus in the plane they become straight lines and circles and species of (13) the three (sections): the hyperbola, the ellipse, and parabola. (14) And it is known, necessarily and clearly, that equally spaced circles on the sphere are projected in these (15) planes, either varying in distances but parallel to each other or varying in distances and not parallel, (i.e.) the same distances lessen (16) in some places and widen in others. When it is thus, the copy of

and did not remain in the same state; (8) rather, they deteriorated and became worthless even if the copy was by ruler and compass. Especially (is this so) since (9) the constellations in those books were isolated, set apart one from another (and) were not represented (10) in (their totality, so that one could make use of the nature of their (relative) positions in knowing and comprehending them, as well as of their occurrence in relationship (11) to each other.

And if someone wanted to copy the positions mentioned of these stars in the books (12) and tables composed for them onto given spheres of whatever substance, an imitation of them on the celestial sphere, (13) as I described in the *Book of the Making of the Sphere*, it would not depart from the imitated at all. (14) It would be an impression on the sight in (its) entirety with no isolation (of the separate parts). Now it is evidently impossible with (15) small spheres and possible with big ones, but the big ones are scarcely to be found, of great inconvenience in (16) transport and carrying, as well as in use and in practice. Thus the difficulty of that is in what corresponds to (17) the benefit in it, if it (the difficulty) does not surpass it (the benefit).

(18) As for copying these stars and their constellations onto the surfaces of flat planes, (19) what is difficult for spheres (transportation from place to place) becomes easy for these; but the matter of imitation in them takes the same course as (the other matter – transportation) on spheres. Then I came across the book of Ptolemy on the figure of the earth, (12:1) called *Geography* and what he said in it on the authority of Marinos (*farībūs*) of instruction on representing (2) the figure of the earth on a plane, among the topics being the drawing of lines parallel to the east-west line and substituting them (3) for the circles of latitude, I mean the circles parallel to the equator (the meridian circles), as well as the drawing of lines parallel to the meridian line (the east-west line) and substituting them for the circles of longitude, I mean the meridian circles (the circles parallel to the equator). (5) He claims that (where) the circle of longitude of the place sought cuts the circle of latitude is its place (6) in the representing plane; but, it is not hidden to him who contemplates (the matter) that the total length, which is half a revolution (7) in every day-circle, (if) this place (is) in the vicinity of (either of) the two poles, be equal in magnitude to the terrestrial equator, (8) (and so) it has no similarity (to reality) such as that of the day-circles on the (model) sphere. Also the widths are found on parallel lines (9) while in reality they are found on nonparallel lines, that all meet at two points, and that is a contradiction.

(10) And it was thus that Muḥammad ibn Jābir al-Battānī showed it in his *zīj* when he wanted to deduce the azimuth (11) of the *qibla* and the place of Mecca relative to the horizon plane. He took, from the end of the east-west [line] (plane) nearest (12) Mecca, on the circumference of the (horizon) circle,

so on. (14) As for the art of judgements (i.e. astrology) that informs us concerning the influence of the higher bodies on the lower bodies, (15) among the (things) clearly needed here is determining their magnitudes, their temperaments (*kaifiyat mizājātihā*), and their colors, (16) by direct sighting as well as their positions relative to the constellations which are used in nativities and their anniversaries and (17) world-year anniversaries and the ascendants of conjunctions and oppositions.

(18) It is also of no small advantage and profit in general knowledge, for example in knowing the times (19) of the year in advance of their changes, due to the succession of the seasons, and knowledge of natural conditions occuring almost regularly in the years (20) throughout time, relating to land and sea, to dryness, dampness (21) and in between, and those of them (natural conditions) found in the vapors (of the atmosphere), unvarying except in places and regions, (22) such as storms (*anwā'*) and strong winds (*bawāriḥ*) and the blazing hot days (*waqdāt*), and the cold (*ḥajrāt*), the great heat (*bawāḥīr*), and the coldest (*Ayyām al-ʿajūz*) days, and similar (means of identifying the seasons) (23) that are used by the Byzantines, Indians, and Arabs, also knowledge of the productive times, in which it is necessary to mate (24) animals, plant trees, and sow seed, since it (the result) differs in other (times) than these; as well as knowledge of the times (25) in which the seas become violent and are agitated and they become unnavigable.

Then, too, (there is) knowledge of the position of cities in the earth relative to each other, (26) of mountains, seas, and rivers and their bends, and the course of the shortest routes (27) and how to make them for the travels of armies (and) the sending forth of caravans. Also knowledge of the directions of places (28) from one to another, either for heading toward them or for facing their directions in accordance with the laws instituted in the books of God, (29) Who is Exalted, and the writings of His prophets, on them be peace, commanding (them) to face them (the places) as a duty (written) in the laws.

(11:1) Rarely is someone found who by sight is able to take in the knowledge of (all of) them (the stars) so that he points to each one of them as a sign to satisfy the questioner and guide (2) the student to certainty; rather, the most are those who rely in this matter on what the specialized books mention, (3) such as the book of ʿUṭārid b. Muḥammad on *The Astrologers' Profession*, the book of ʿUmār b. al-Farrukhān al-Ṭabarī *On* (4) *the Representation of the Sphere*, the book of Abū'l-Ḥusayn al-Ṣūfī *On the Fixed Stars*, and the books of authors on the (5) *anwā'* limited to the teachings of the Arabs.

(6) Moreover it is certainly clear that those constellations represented in those books, even if their representation was true (7) and their accounts exact, changed with the succession of manuscripts and the multitude of copies,

Of the above writings we have had access only to the study by Fiorini, the translation by Suter and the text established by Saʿīdān. Since Suter's translation is incomplete, only summarizing the text at certain points, and he devotes but a third of the one page of commentary to a study of the projections, we have written the present paper to give a complete translation of the scientific text as well as a mathematical study of the mappings al-Bīrūnī describes in it. Since these are some of the few new mappings of the sphere to be described since Ptolemy wrote his *Geography* almost 900 years earlier, there seems to be sufficient reason to study this treatise in detail.

1. Translation

Our translation is based on the Arabic text of the treatise as edited by A. Saʿīdān [27]. (On difficult passages we have of course consulted Suter [29] and have followed him probably as often as we have departed from him.) Where we have altered the readings in this text we enclose the alteration in square brackets and supply a transliteration of the actual text in parentheses immediately following. Additionally, any material we have added by way of explanation is enclosed in parentheses. A short commentary on the translation supplies any additional remarks that cannot be conveniently inserted by brackets or parentheses in the translation itself. The notation $(n{:}m)$ denotes the beginning of line m of page n of Saʿīdān's edition of the text while (m) denotes the beginning of line m. We translate "jayb" by "sine", but the reader must remember that the medieval sine function, usually written $\mathrm{Sin}_R\ \Theta$, is related to the modern by the rule $\mathrm{Sin}_R\ \Theta = R \sin \Theta$, where R is the radius of the circle. When only one circle is under consideration we write simply $\mathrm{Sin}\ \Theta$.

Since the Arabic MS of al-Bīrūnī's work lacks three diagrams we have, following Saʿīdān, supplied these, and we have followed the system of Kennedy and Hermelink [12] in transcribing letters in the text referring to points of geometrical diagrams.

The translation follows:

(10:6) Acquaintance with the complete constellations comprising the observed stars, from among those with which the heaven is decorated (7) and which are made signs for those observing carefully the heavens and indications for those who wander on dry land or sea, is (8) of no little advantage or utility in both parts of the science of heavenly bodies. (9) As for the science of the form of the heavens, it concerns the stars, their motions, the practice of observations (in terms of) what is necessary (10) for taking their altitudes and the distances of what follows them, and in knowing the times at night when there is need of (11) determining them, in showing quantities of the movements and of the periods, past (12) and future, and the verification of returns in the eccentric orbits and the comparison of the rest (13) of the stars to them, and

Al-Bīrūnī On Plane Maps of the Sphere

J. L. Berggren*

DURING HIS LONG LIFETIME Abū'l-Rayḥān al-Bīrūnī (974-1048) wrote many works bearing witness to his learning and scientific imagination. One of these, the subject of the present paper, is his treatise on map projections, the *K. Tasṭīḥ al-ṣuwar wa tabṭīḥ al-kuwar*, (*The Book of the Projection of the Constellations and Making Spheres Plane*), which is preserved in Leyden as No. 15 of Cod. Or. 1068. Although this copy of the treatise is anonymous, al-Bīrūnī lists it in his own index of his works under the heading of books "on instruments and their use" (see E. Wiedemann, [33, II, p.493]), and much of its contents may be found in the concluding pages of his *Chronology of Ancient Nations*, [3, pp.357-364]. Sezgin [28, V, p.381] reports a copy at Tehran.

The scientific text of *K. Tasṭīḥ al-ṣuwar* was, apart from a few sections, translated into German by H. Suter in 1922, [29, pp. 79-93] with a brief commentary. More recently an Uzbek translation was published by A. Rasulov in 1973, [22] followed by a Russian translation by A. Ahmedov and B. A. Rozenfeld in 1978, [1]. In addition Sezgin [28, VI, p. 272] reports a Persian summary and study by Dānāsirisht. Also, in 1977 A. Sa'īdān published an edition of the text [27], which was badly needed in view of Suter's report that "The manuscript was very carelessly done, it exhibits various gaps, it contains repetitions of sentences, unclear and incorrectly written words, diacritical points are often lacking or are incorrectly placed, and of the four figures the text contains only the first . . . ," [29, p.79]. Finally we draw the reader's attention to the valuable historical study by M. Fiorini [10] of the use by Western cartographers of the projections al-Bīrūnī discusses at the end of *The Chronology*, projections also mentioned in the *K. tasṭīḥ al-ṣuwar*.

*Department of Mathematics, Simon Fraser University, Burnaby, B. C., Canada V5A 1S6.

It is a pleasure to acknowledge the assistance of several individuals and institutions in the preparation of this paper. First of all, Dr. A. Y. al-Hassan, past director of the Institute for the History of Arabic Science in Aleppo, Syria, provided office space and facilities for research during my stay there in the Fall of 1979. Professor E. S. Kennedy, of the same Institute, suggested the project to me and gave considerable help and encouragement in completing it while Miss Safa Msallati helped in translating several passages. Professor F. Ericksson of Chalmers Technical University in Gothenburg, Sweden, explained the elements of Tissot's theory to me and Professor G. Lannér of the same institution had their computer plotter draw the coordinate lines of the projection, shown in Fig. 6. Finally the National Sciences and Engineering Rescearch Council of Canada provided generous financial help. To all of these, my sincere thanks.

Toledan Tables	See *Toomer 1*.
Toomer 1	G. J. Toomer, "A Survey of the Toledan Tables", *Osiris*, 15 (1968), 5-174.
—— *2*	————, "The Solar Theory of az-Zarqāl: A History of Errors", *Centaurus*, 14 (1969), 306-336.
Vernet 1	Juan Vernet Ginés, *Contributión al Estudio de la Labor Astronómica de Ibn al-Bannā'* (Tetuan: Editora Marroqui, 1951).
—— *2*	————, "Los manuscritos astronómicos de Ibn al-Bannā'", *Actes du VIII*e *Congrès International d'Histoire des Sciences*, (Florence, 1956), 297-298.
al-Zarqāllu	See *Millás* and *Toomer 2*.

——— 4	———, "Al-Khwārizmī in Samaria", in press.
——— 5	———, "Ibn Abī 'l-Riḍjāl", *Encyclopaedia of* Islam, 2nd edition (Leiden: Brill, 1979), vol. III p. 688.
Price	D. J. de Solla Price, "Mechanical Water Clocks of the 14th Century in Fez, Morocco," *Proceedings of the Tenth International Congress for the History of Science*, (Ithaca. 1962), pp. 599-602.
Renaud 1	H. J. P. Renaud, "Additions et Corrections à Suter 'Die Mathematiker und Astronomen der Araber'", *Isis*, 18 (1932), 166-183.
——— 2	———, "Astronomie et Astrologie Marocaines", *Hespéris*, 29 (1942), 41-63.
——— 3	———, *Les Manuscrits Arabes de l'Escorial*, Tome II, Fasc. 3: *Sciences Exactes et Sciences Occultes*, (Paris: Paul Geuthner, 1941).
——— 4	———, "Quelques Constructeurs d'Astrolabes en Occident Musulman", *Isis*, 34 (1942), 20-23.
——— 5	———, "Ibn al-Bannā' de Marrakesh – Ṣūfī et Mathématicien (XIII[e]-XIV[e] S. J.C.)", *Hespéris*, 25 (1933), 13-42.
——— 6	———, "L'Enseignement des sciences exactes et l'édition d'ouvrages scientifiques au Maroc avant l'occupation Européenne", *Archeion*, 13 (1931), 325-336, reprinted in *Hespéris*, 14 (1932), 78-89.
——— 7	———, "Un pretendu catalogue de la Bibliothèque de la Grande Mosquée de Fès", *Hespéris*, 18 (1934), 76-99.
——— 8	———, *Le Calendrier d'Ibn al-Bannā' de Marrakech* (1256-1321 J.C.), Publications de l'Institut des Hautes-Etudes Marocaines, tôme XXXIV, (Paris: Larose Editeurs, 1948).
Rosenthal	F. Rosenthal, trans. and comm., *Ibn Khaldūn: the Muqaddimah*, 3 vols., 2nd. ed., (Princeton: Princeton University Press, 1967).
Samsó	J. Samsó Moyá, "A propos de quelques manuscrits astronomiques des bibliothèques de Tunis ...", *Actas del Coloquio-Tunecino de Estudios Históricos*, (Madrid, 1973), pp. 171-190.
Sédillot-fils	L. A. Sédillot, "Mémoire sur les Instruments Astronomiques des Arabes", *Mémoires de l'Academie Royale des Inscriptions et Belles-lettres de l'Institut de France*, 1 (1844), 1-229.
Sédillot-père	J.-J. Sédillot, *Traité des Instruments Astronomiques des Arabes Composé au Treizième Siècle par Aboul Hhassan Ali de Maroc*, 2 vols., (Paris: Imprimerie Royale, 1834-35).
Sezgin	F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, 7 vols. to date, (Leiden: E. J. Brill, 1967 to present).
Suter 1	H. Suter, "Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke", *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, 10 (1900), and "Nachträge und Berichtigungen", *ibid.*, 14 (1902), 157-185.
——— 2	———, *Die astronomischen Tafeln des Muḥammed ibn Mūsā al-Khwārizmī ...*, *Kg. Danske Vidensk. Skrifter*, 7H. R., ist. og filos. Afd. 3, 1, (Copenhagen, 1914).

Janin	L. Janin, "Quelques aspects récents de la gnomonique tunisienne". *Revue de l'Occident Musulman et de la Mediterranée*, 24 (1977), 207-221.
Kennedy 1	E. S. Kennedy, "A Survey of Islamic Astronomical Tables", *Transactions of the American Philosophical Society*, N. S. 46, Pt. 2, (Philadelphia, 1956).
——— *2*	———, "The Astronomical Tables of Ibn al-Aʿlam", *Journal for the History of Arabic Science*, 1 (1977), 13-23.
Kennedy & Janjanian	E. S. Kennedy and Martiros Janjanian, "The Crescent Visibility Table in al-Khwārizmī's Zīj". *Centaurus*, 11 (1965), 73-78.
Kennedy & Muruwwa	E. S. Kennedy and Ahmad Muruwwa, "Bīrūnī on the Solar Equation". *Journal of Near Eastern Studies*, 17 (1958), 112-121.
al-Khwārizmī	See *Suter 2* and *Neugebauer 2*.
King 1	D. A. King, "A Fourteenth-Century Tunisian Sundial for Regulating the Times of Muslim Prayer," in *Hartner Festscrift*, pp. 187-202.
——— *2*	———, "Astronomical Timekeeping in Fourteenth-Century Syria", *Proceedings of the First International Symposium for the History of Arabic Science*, (Aleppo, 1976), pp. 75-84.
——— *3*	———, "Three Sundials from Islamic Andalusia," *Journal for the History of Arabic Science*, 2 (1978), 358-392.
——— *4*	———, "Early Islamic Astronomy (Review of *Sezgin*, VI)", *Journal for the History of Astronomy*, 12 (1981), pp. 55-59.
al-Marrākushī	See *Sédillot-père* and *-fils*.
Mayer	L. A. Mayer, *Islamic Astrolabists and Their Works* (Geneva: Ernst Kundig, 1956), and a supplement "Islamic Astrolabists: Some New Material", in R. Ettinghausen, ed., *Aus der Welt der Islamischen Kunst* (Berlin: Verlag Gebr. Mann, 1959), pp. 293-296.
Millás	J. Millás Vallicrosa, *Estudios Sobre Azarquiel*, (Madrid, 1950).
Nallino	*Al-Battani sive Albatenii Opus Astronomicum*, ed. and transl. by C. A. Nallino, 3 vols., (Milan, 1899-1907).
Neugebauer 1	O. Neugebauer, "The Transmission of Planetary Theories in Ancient and Medieval Astronomy", *Scripta Mathematica*, 22 (1956), 165-192.
——— *2*	———, *The Astronomical Tables of al-Khwārizmī*, Hist. Filos. Skr. Dans. Vid. Selsk. 4, no.2, (Copenhagen, 1962).
——— *3*	———, "Thābit ben Qurra 'On the Solar Year' and 'On the Motion of the Eighth Sphere'", *Proceedings of the American Philosophical Society*, 106 (1962), 264-299.
Pingree 1	D. Pingree, "Indian Influence on Sasanian and Early Islamic Astronomy and Astrology", *The Journal of Oriental Research*, Madras, 34-35 (1964-66/1973), 118-126.
——— *2*	———, "History of Mathematical Astronomy in India", *DSB*, vol. *XV*, Supplement 1, (1978), pp. 533-633.
——— *3*	———, "The Indian and Pseudo-Indian Passages in Greek and Latin Astronomical and Astrological Texts", *Viator (Medieval and Renaissance Studies)*, 7 (1976), 141-195.

Bibliography

Azzawi — A. Azzawi, *Ta'rīkh ᶜilm al-falak fī'l-ᶜIrāq* ... (= *History of Astronomy in Iraq and its Relations with Islamic Arab Countries in the Times Following the Abbasid Era* ..., Baghdad: al-Majmaᶜ al-ᶜilmī al-ᶜIrāqī, 1958).

al-Battānī — See *Nallino*.

Brieux & Maddison — A. Brieux and F. Maddison, *Repertoire des Facteurs d'Astrolabes et leurs Oeuvres*, Part I: *Islam*, to appear.

Brockelmann — C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Litteratur*, 2 vols., 2nd. ed., (Leiden: E.J. Brill, 1943-49, and Supplementbände, 3 vols., Leiden: E. J. Brill, 1937-42).

Burckhardt — J. J. Burckhardt, "Die mittleren Bewegungen der Planeten im Tafelwerk des Khwārizmī", *Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. Zürich*, 106 (1961), 213-231.

Cairo Cat. & Survey — D. A. King, *A Catalogue of the Scientific Manuscripts in the Egyptian National Library* (in Arabic), 2 vols., Cairo: General Egyptian Book Organization, 1981-82, and *A Survey of the Scientific Manuscripts in the Egyptian National Library* (in English), to be published by the American Research Center in Egypt with Undena Press.

Colin & Renaud — G. S. Colin and H. P. J. Renaud, "Note sur le 'muwaqqit' marocain Abu Muqriᶜ – ou mieux Abu Miqraᶜ – al-Baṭṭīwī (XIIIᵉ s. J.-C.)", *Hesperis*, 25 (1933), 94-96.

Djebbar — A. Djebbar, *Enseignement et Recherche Mathematiques Dans le Maghreb des XIIIᵉ-XIVᵉ Siècles*, Publications Mathématiques d'Orsay, no. 81-02, (Orsay: Univ. de Paris-Sud, 1980).

DSB — *Dictionary of Scientific Biography*, 14 vols. and 2 supplementary vols. to date, (New York: Charles Scribner's Sons, 1970 to present).

Goldstein 1 — B. R. Goldstein, "On the Theory of Trepidation according to Thābit b. Qurra and al-Zarqāllu and its Implications for Homocentric Planetary Theory", *Centaurus*, 10 (1964), 232-247.

——— 2 — ———, "The Hebrew Astronomical Tradition: New Sources", *Isis*, 72 (1981), 273-291.

——— 3 — ———, *Ibn al-Muthannā's Commentary on the Astronomical Tables of al-Khwārizmī* (New Haven and London: Yale University Press, 1967).

Gunther — R. T. Gunther, *The Astrolabes of the World*, 2 vols., (Oxford: University Press, 1932, reprinted London: The Holland Press, 1967).

Hartner Festchrift — Y. Maeyama and W. G. Saltzer, eds., *Prismata: Naturwissenschaftsgeschichtliche Studien: Feschrift für Willy Hartner*, (Wiesbaden: Franz Steiner, 1977).

Ibn al-Bannā' — See *Vernet 1* and *2*; the MS of his *Zīj* used in this study is MS Escorial ar. 909,1.

Irani — R. A. K. Irani, "Arabic Numeral Forms", *Centaurus*, 4 (1955), 1-12.

Escorial ar. 909, ff. 63v, 64r.

Escorial ar. 909, ff. 62v, 63r.

٢٤١

Escorial ar. 909, ff. 61v, 62r.

Escorial ar. 909, ff. 60v, 61r.

Escorial ar. 909, ff. 59v, 60r.

Escorial ar. 909, ff. 58v, 59r.

Escorial ar. 909, ff. 57v, 58r.

Escorial ar. 909, ff. 56v, 57r.

Escorial ar. 909, ff. 55v, 56r.

٢٤٨

Escorial ar. 909, ff. 51v, 55r.

Escorial ar. 909, ff. 53v, 51r.

Escorial ar. 909, ff. 52v, 53r.

Escorial ar. 909, ff. 51v, 52r.

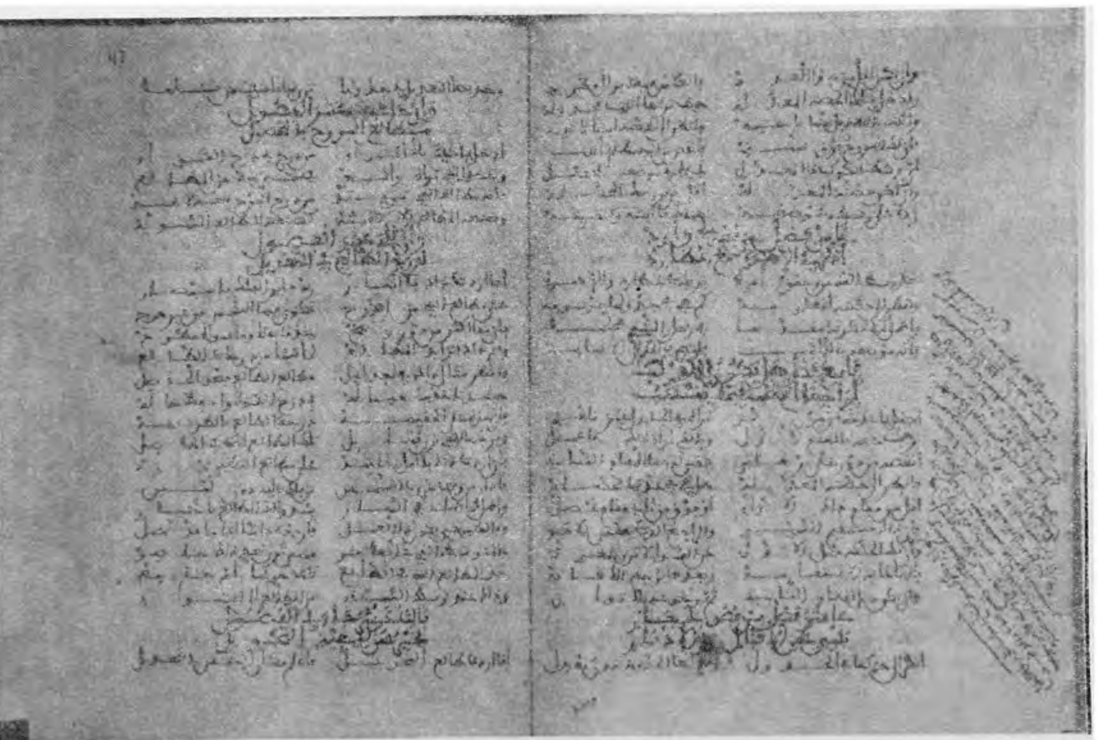
Escorial ar. 909, ff. 50v, 51r.

Escorial ar. 909, ff. 49v, 50r.

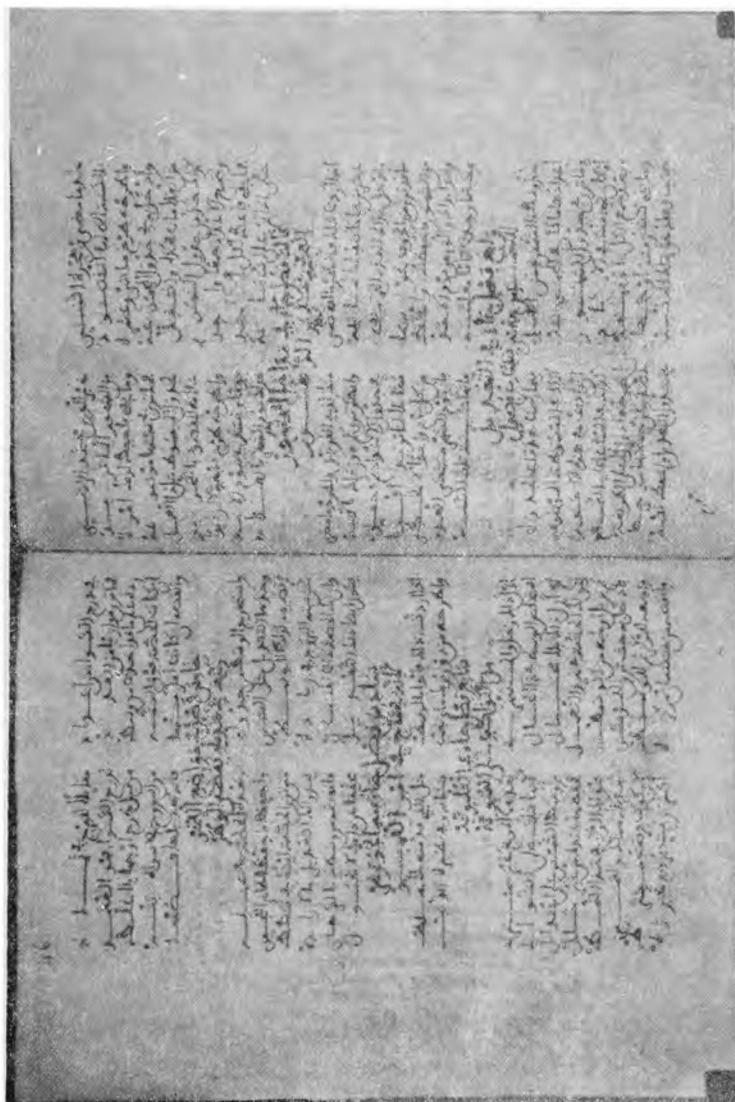


Escorial ar. 909, ff. 48v, 49r.

Escorial ar. 909, ff. 47v, 48r.



Escorial ar. 909, ff. 46v, 47r.



Escorial ar. 909, ff. 45v, 46r.



Escorial ar. 909, ff. 44v, 45r.

Dist. betw. moon and node	True daily lunar motion			
	12	13	14	15
	Amount of the moon's body eclipsed			
	digits	digits	digits	digits
1	12	12	12	12
2	12	12	12	12
3	12	12	12	12
4	12	12	12	12
5	12	12	12	12
6	8	10	11	11
7	7	6	9	10
8	4	5	7	8
9	2	3	4	6
10	0	0	2	3
11	0	0	0	2

Dist betw. moon and node	True daily lunar motion			
	12	13	14	15
	Amount of the sun's body eclipsed			
	digits	digits	digits	digits
1	12	12	12	12
2	12	12	12	12
3	12	12	12	12
4	8	8	10	11
5	6	6	8	9
6	4	4	6	6
7	3	3	4	6
8	1	2	3	3
9	0	1	1	2
10	0	0	0	2
11	0	0	0	1

folio

Table of Lunar Latitude 62v

The argument is $\lambda = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 360^\circ$.

Entries are $4;30^\circ \sin \lambda$, to minutes, the standard Indian method. Cf. *Suter 2*, Tables 21-26.

Table of Eclipse Colors 63r

The table is in two parts. On the right the argument is: 10′, 20′, 30′, ..., 60′ of lunar latitude. Entries are colors of the moon.

On the left the argument is 5′, 10′, 15′, ..., 35′ of lunar latitude. Entries are colors of the sun.

The same table is in *Ibn al-Bannā'*.

Colophon (No date or name is given). 63v

MS Paris B. N. ar. 6913, f. 102r of *al-Zīj al-Rīqānī*, an eleventh-century compilation; MS Escorial ar. 927, f. 6r of the anonymous recension of the ninth-century *Mumtaḥan Zīj*; and MS Cairo ṬFF 11, f. 61r of the eleventh-century Persian astrological handbook entitled *Rawḍat al-munajjimīn*.

Each of these tables is investigated in a forthcoming study by the second author on early Islamic tables for determining lunar crescent visibility.

ZODIACAL SIGNS	CLIMATES 1st	2d	3d	4th	5th	6th	7th
Aries	11;24	11;4	11;19	10;6	11;17	9;9	9;28
Taurus	11;11	11;24	10;33	10;21	10;12	9;18	9;28
Gemini	11;2	11;11	10;10	10;32	9;29	9;24	9;3
Cancer	11;10	11;15	11;38	10;32	12;25	12;46	12;9
Leo	13;14	13;18	13;4	15;0	16;7	16;17	13;15
Virgo	14;27	16;19	17;2	17;10	23;27	23;21	24;50
Libra	15;2	16;7	18;19	19;4	21;28	22;24	24;1
Scorpio	14;12	14;32	16;19	17;17	13;2	19;42	21;2
Sagittarius	12;0	18;39	13;18	14;42	14;31	14;2	14;31
Capricorn	11;10	11;45	11;21	11;26	11;0	11;9	11;45
Aquarius	11;3	11;47	11;2	11;4	9;15	9;7	9;15
Pisces	11;24	11;11	11;9	10;9	9;11	9;0	8;14

Table of Lunar Crescent Visibility, f. 61v

folio

Table of Eclipses 62r

There are in fact two tables, transcribed below, one for lunar, one for solar eclipses. For each there are two arguments:

1, 2, 3, ..., 11, distance between moon and node,

12, 13, 14, 15, deg./day lunar motion.

Entries give the eclipse magnitude in integer digits.
This is a garbled version of a table given by *Ibn al-Bannā'*.

folio

Table of First Stations of the Five Planets (see *Kennedy 1*, p.142) 59v

Entries are to minutes of arc for argument 6°, 12°, 18°, ..., 180°.

Essentially this is the table of al-Battānī (*Nallino*, vol. 2, pp. 138-9), hence originally from Ptolemy's Handy Tables. See also *Suter 2*.

Table, Equation of the Trepidation Motion 60r

Argument range: $\Theta = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 360^\circ$.

Entries, to minutes, are close to 10;45 sin Θ, Thābit (in *Vernet 1*, p, 91, note 182 and p. 92, note 187) has a maximum of 10;45°, and al-Marrākushī (in *Sédillot-père*, p. 131) has 9;59°.

Table of Right Ascensions 60v

Entries are to degrees (sic) for each degree of the argument. The Function is in fact the normed right ascension function, $A_0(\lambda)-90^\circ$, commencing with Capricorn.

Table of Oblique Ascensions for (the latitute of) *Fez* 61r

Layout and precision as in the preceding table, except that this commences from Aries.

Table of Evening Lunar Crescent Visibility, 61v

transcribed below. The same table appears in Paris MS B.N. Or. 2513, f. 71v, of the thirteenth-century Egyptian *Muṣṭalaḥ Zīj*; f. 58v of an unnumbered Maghribi astronomical manuscript in the Museo Naval de Madrid; MS Cairo Dār al-Kutub MM 23, f. 9r, of a small *zīj* compiled in Cairo *ca.* 1700; MSS Milan Ambrosiana C82, front flyleaf, and Escorial ar. 966, f. 192v of a redaction of the astronomical tables of the late-fifteenth-century Spanish Jew Abraham Zacuto (see note 15 to Section 2) prepared in Istanbul in the early sixteenth century; and in MS Cairo ṬM 119, f. 1r on the title folio of an Egyptian copy of an early Iraqi astrological treatise.

The table from al-Majrīṭī's recension of al-Khwārizmī's *zīj* investigated by *Kennedy & Janjanian* is unrelated to al-Khwārizmī. It is also found in MS Hyderabad Andra Pradesh State Library 298 of the *zīj* of Ibn Isḥāq (see note 9 to Section 2) where it features as table no. 160. Here the table is attributed to an individual called al-Qallās, whose name is new to the literature. This table is computed for a latitude in northern Spain. Al-Khwārizmī's table for Baghdad is contained in

folio

1, 2, 3, ..., 30 days,
1, 2, 3, ..., 12 Hijra months,
1, 2, 3, ..., 30 Hijra years.

Positions are given for

600, 630, 660, ..., 990 H.

Tables of Lunar Mean Motion, Anomaly, and Nodes 51v–52v
Layout, arguments, and precision as for the sun.

Tables, Mean Motion of Saturn, Jupiter, and Mars 53r–54r
Layout, etc., as for the sun.

Tables, Anomalistic Argument of Venus and Mercury, as for the sun. 54v–55r

Table of Hourly Planetary Mean Motions 55v

Entries are to seconds, for 1, 2, 3, ... 24 hours, for the sun, moon, lunar anomaly, lunar nodes, Saturn, Jupiter, Mars, and the anomalistic arguments of Venus and Mercury.

Table of the Motion of Trepidation 56r

Layout, arguments, and precision as for the mean sun.

Table of the Solar Equation 56v

Entries are to minutes of arc for each degree of the argument. The function is discussed in Section 3 above.

Table of the Lunar Equation 56v

Same layout, arguments, and precision as for the solar equation. See Section 3 above.

Table, The Anomalistic Equation of Saturn 57r

Entries are to minutes of arc for each degree of the argument .The function is discussed in Section 3 above.

Table Equation of the Center, for Saturn 57r

Domain of the argument and precision of entries is as for the other equation of Saturn. See Section 3 above.

Tables, Equations of the Anomaly and Center, for Jupiter and Mars 57v-58r

Layout, arguments, and precision are as for Saturn.

Tables , Equations of the Anomaly and Center, for Venus and Mercury, as for Saturn. 58v–59r

folio

Table for Extracting the Rūmī Date (i. e. Seleucid epoch, Julian years) *from the Arab* (i. e. Hijra) 49v

For 480, 510, 540, ..., 900 H the equivalent Rūmī date is given in years, months, days, and minutes (i. e. sixtieths) of days.

For 1, 2, 3, ... 30 Hijra years,

1, 2, 3, ... 12 Hijra months,

1, 2, 3, ,,, 12 Latin months (beginning with October),

the elapsed time is given in Rūmī years, months, days, and minutes of days. The same table is in *Suter 2*, Table 3, *Sedillot-père*, p. 97, and Ibn al-Bannā'.

A Table of Signa (initial weekdays) *of the Arab* (i.e. Hijra) *Years and their Months, and the Apogees* 50r

The entries are changes in the signa for:

30, 60, 90, ..., 210 years,

1, 2, 3, ..., 30 years (not in order).

1, 2, 3, ..., 12 Hijra months.

There is a table of planetary apogees, to minutes of arc, transcribed and discussed in Section 2 above. The list is repeated at the top of f.53r. The same table is in *Suter 2*, Table 2, and Ibn al-Bannā'.

A Table of Signa of the Foreign (ʿajamiya) *Months in the Calendar of the Two-Horned* (Alexander, i.e. Rūmī) 50v

This is a rectangular, double argument table, in which the entries are signa, and the arguments are:

1, 2, 3, ... , 27 (Julian) years (since $28 = 7$ days/week $\times$ 4, the leap cycle)

and Oct., Nov., Dec., ..., Sept.

The leap years are also indicated. This table is also in *Suter 2*, Table 3a, and Ibn al-Bannā'.

Table of the Solar Mean Motion in Hijra Years, for Noon at the City of Fez 51r

All entries are to seconds. Motions are given for:

	folio
Section 2, *On Determining the Day of the Week on Which a Given Arab* (Hijra) *Year Begins*	45r
Section 3, *On Determining the Initial Day of the Week of Months of Foreign* (Calendars)	45v
Section 4, *The Solar Equation*	45v
Section 5, *On* (true) *Positions of the Moon and Its Equation*	46r
Section 6, *On the Lunar Node*	46r
Section 7, *On the* (longitudes) *of the Superior Planets*	46r
Section 8, *On* (the longitudes of) *Venus and Mercury*	46v
Section 9, *Is the Planet Retrograde or in Forward Motion?*	46v
Section 10, *In Explanation of Trepidation*	46v
Section 11, *On Obtaining the Ascensions of the Signs*	47r
Section 12, *On the Degrees of Rising with the Equation*	47r
Section 13, *On How* (to determine) *the Transfer* (ascendant)	47r
Section 14, *On the Equalization of the Houses*	47v
Section 15, *On* (first) *Visibility of the* (lunar) *Crescent*	47v
Section 16, *On Determining the Lunar Latitude*	48r
Section 17, *On* al-Faḍl al-Muqawwam	48r

(This seems to be a measure of the amount by which the planet has passed the last cardine, perhaps for finding its house.)

Section 18, *On Determining* (the astrological doctrine of) *the* Tasyīr.	48r
Section 19, *On the Determination of Eclipses*	48v
Table of the Solar Apsidal Motion	49r

All entries are to seconds of arc. Apsidal *motions* are given for:

1,2,3, ... , 30 days,
1,2,3, ... , 12 (Hijra) months,
1,2,3, ... , 30 (Hijra) years.

This table is practically identical with one in the zīj of Ibn al-Bannā' (*Vernet 1*) found on f. 15r in the same MS. It was published in *Millás*, p. 352, see also Section 3 above.

For the Hijra epoch *Millás* (*ibid.*) gives $2^s\ 16;44,17^\circ$. In the Escorial manuscript of Ibn al-Bannā''s *zīj* (fol. 15r) there is a marginal note that the apogee in 990 Hijra (=1582) is $2^s\ 20;10,51^\circ$, which is consistent with the Hijra epoch position and the motion of $3;26,33^e$ for 990 lunar years given in the table. A marginal note, in the same hand, to al-Qusunṭīnī's table (fol. 49r) gives the apogee in 990 Hijra as $2^s\ 20;12,27^\circ$, for reasons best known to the writer of the note.

and obtain the epicyclic equation ($\sigma(\alpha')$) at its place. Look at the argument a second time, (4) and if you have zodiacal signs exceeding six, subtract (the epicyclic equation from the modified mean). Then note (5) any modified planetary mean (here λ is intended) as you find it, in its resulting place. (6) But if the modified argument is less than your signs (i.e., if $\alpha' < 6^s$) (7) add it (the epicyclic equation) to the mean, and its place (i. e. true longitude) will be there, and note, it, and do not lose it.

Several conclusions are immediate and unequivocal. The equation functions are of Indian (or Iranian), provenance with no trace of Ptolemaic influence. On the other hand, the characteristic "halving of the equation" is conspicuously absent .The calculation of α' is described completely and correctly. The only objection to the adoption of expression (5) arises from the author's prescription of $\overline{\lambda}'$ as being $\overline{\lambda}' + \mu(\varkappa)$ instead of $\overline{\lambda}' - \mu(\varkappa)$ as it should be. We must bear in mind, however, that since negative numbers were generally unknown to medieval scientists, they were often constrained to split a rule into special cases if a function were sometimes positive and sometimes negative. The complete rule would then demand addition in one case and subtraction in the other, or vice versa. It is possible that a complete couplet has been dropped from al-Qusunṭīnī's poesy by a careless scribe. If the passage beginning with line 25 could be restored as

> Then enter with it according to what you see for the center, (obtaining) its equation ($\mu(\varkappa)$) there, for distinguishing it. [If the center is less than six signs, subtract the equation from the center, then from the mean. But if it is more than six signs] add it to the center, then to the mean...

the rule would be (5) without flaw. Or perhaps, in hammering out his doggerel, the poet inadvertently left out our restoration. At any rate we prefer not to accuse al-Qusunṭīnī of having been an originator. We suspect he obtained the algorism from a sequence of predecessors, including perhaps Maghribi, early Islamic, Indian, and pre-Ptolemaic Greek elements. The discovery of additional texts may settle the issue. Meanwhile we favor expression (5).

It is also possible that in its original form the procedure contained some sort of "halving the equation" routine, as in (5), which was dropped some where along the chain of transmission.

6. *Table of Contents of the Zīj*

(3) $$\lambda = \bar{\lambda} - \mu(\varkappa) + \sigma(\alpha') + I(\varkappa') \cdot \Delta\sigma(\alpha'),$$

where $\alpha' = \alpha + \mu(\varkappa)$, $\varkappa' = \varkappa - \mu(\varkappa)$, I is an interpolation function varying between ± 1, and $\Delta\sigma$ is the difference between σ calculated at minimum and maximum epicycle distances.

For the simple eccentric configuration illustrated in our figure a practical and accurate mode of determining true longitude (nowhere intimated in an extant text, so far as we know) would be to put

(4) $$\lambda = \bar{\lambda} - \mu(\varkappa) + \sigma(\alpha') + I(\varkappa) \cdot \Delta\sigma(\alpha'),$$

where α', I, and $\Delta\sigma$ are as indicated above.

We will seek to show that the model intended by al-Qusunṭīnī's zīj is

(5) $$\lambda = \bar{\lambda} - \mu(\varkappa) + \sigma(\alpha') = \bar{\lambda}' + \sigma(\alpha'),$$

where we call $\bar{\lambda}'$ the *modified mean*. This is expression (4) with the last term missing. That is to say, it takes cognizance of the nodding of the epicyclic apogee about its mean position, but it ignores the effect on σ of the varying epicyclic distance from the earth.

Aside from the tables themselves, all the information upon which these conclusions are based is found in Section 7 of the verse introduction (beginning on folio 45r) which describes the calculation of λ for the superior planets. The next section does the same for Venus and Mercury, but adds nothing significant.

Section 7 of Qusunṭīnī's zīj is translated below. Parentheses are used to denote beginnings of lines in the text, and to interpolate explanatory material. The redundant verbiage in the text consists of words or phrases introduced to pad out the meter and the rhyme.

(f.46r:20) The first of those are Saturn and Jupiter, and after those two, Mars, indubitably. (21) Extract the mean ($\bar{\lambda}$) for that situation, for any one of them you choose (?), along the succession (of the zodiacal signs). (22) Then, without fail, subtract it from the solar mean properly; (23) there will remain for you the argument ($\alpha = \bar{\lambda}_s - \bar{\lambda}$) in this operation. Retain it without fail. (24) Then subtract its apogee from the mean. There will remain for you the center ($\varkappa = \bar{\lambda} - \lambda_a$) in this style. (25) Then enter with it according to what you see for the center, (obtaining) its equation ($\mu(\varkappa)$) there, for distinguishing (it). (26) Add it to the center, then to the mean (i.e., form $\varkappa + \mu(\varkappa)$ and $\bar{\lambda} + \mu(\varkappa) = \bar{\lambda}$, sic), for any planet you suppose as a condition. (27) But subtract it ($\mu(\varkappa)$) from its (the planet's) argument if its center is greater than six signs – obtain it, (f.46v:1) but if it is less than that number ($\varkappa < 6^s$), (do) the opposite with it, do not add continuously (i.e. form $\alpha' = \alpha + \mu(\varkappa)$ algebraically). (2) Enter with this modified argument (α') where you see it registered in the table, (3)

and the planet on the epicycle are given by two linear functions of time: $\bar{\lambda}$, the *mean longitude*, and α, the *argument* of the epicycle anomaly. Then the true longitude is

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma(\alpha), \tag{1}$$

where σ is the *epicyclic equation*. Note from the picture that σ causes periodic variations in λ's rate of change; alternately λ leads $\bar{\lambda}$, then lags behind it.

At some time it was realized that (1) is too simple to yield precise predictions of position for planets. The deferent was made eccentric, its center being displaced from the earth. This caused a second periodic irregularity in the planet's motion, $\mu(\varkappa)$, the *equation of the center*, where $\varkappa = \bar{\lambda} - \lambda_a$ is the *center*. $\bar{\lambda}_s$ is the solar mean longitude.

The addition of the second equation greatly complicated the calculation of true longitudes. The two equations cannot simply be added algebraically to $\bar{\lambda}$ because they interact with each other in a complicated manner. For one thing, the initial point from which the argument is measured, the *epicyclic apogee*, oscillates back and forth with respect to its fixed position in the simple model. And secondly, the distance from earth to epicycle also varies. When the epicycle retires from the earth, its effect is diminished, and conversely.

Tables of the σ and μ functions were prepared, the arguments α and $\varkappa$ being determined from the mean motion tables. Neither equation is in principle symmetrical with respect to an α or $\varkappa$ of 90°. Nevertheless it was customary in Indian and Sasanian Iranian astronomy to use for μ a sine wave of amplitude μ_{max} for each planet. In addition to the equation tables, some computational device was necessary, to give numerical effect to the interaction described above between the equations.

Indian astronomers used an ingenious if complicated technique to attain this end. Its main lines are indicated by the expression

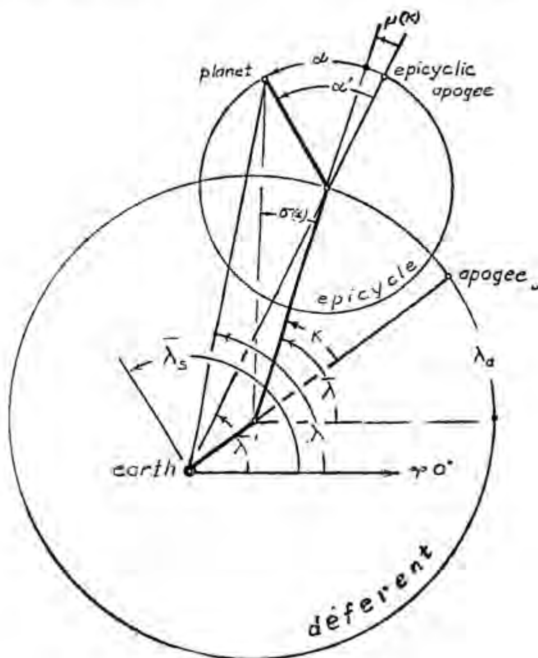
$$\lambda = \bar{\lambda} - \mu_2 + \sigma_2, \tag{2}$$

from $\sigma_1 = \sigma(\alpha)$, $\lambda_1 = \bar{\lambda} + \frac{1}{2}\sigma_1$, $\varkappa_1 = \varkappa + \frac{1}{2}\sigma_1$, $\mu_1 = \mu(\varkappa_1)$, $\varkappa_2 = \varkappa_1 - \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1$, etc. The general idea was to merge the effects of the two equations by successively introducing half of the one into the determination of the other. There were variants of the basic approach, some rules halving only one equation, and some neither. Details will be found in *Neugebauer 1*, and *2*, pp. 23-30.

A basic improvement was effected by Ptolemy's introduction (ca. 150 A.D.) of the *equant*, a device to introduce a periodic variation in the speed of the epicycle center along the deferent. After suitable modification of the μ functions, Ptolemaic longitudes are calculated by the expression

5. *Calculation of True Longitudes*

Since the evidence upon which our further inferences are based is somewhat ambiguous, it will be useful to preface its presentation with a sketch of several ancient planetary models, to which al-Qusunṭīnī's is related. For all these models the orbits of the planet and the earth about the sun can be thought of as represented by two circles, the *deferent* and the *epicycle* shown in the figure below. Which circle stands for which orbit depends upon whether an inner or outer planet is being considered. Without essential loss of generality, the figure and the discussion below are taken to be for an outer planet.



An eccentric (non-equant) model
for planetary motion.

The simplest (and earliest) of the models described has the earth at the center of the deferent. The planet advances along the periphery of the epicycle at constant speed whilst the epicycle center traverses the deferent with a different constant speed. At any instant the locations of the epicycle center

ṭīnī's whole set of apogees is a rounded off version of Ibn al-Bannā's, which is given to seconds (*Vernet 1*).

It is worth remarking that 2^s 16;44,17°, the position given for the solar apogee at the Hijra epoch (on f. 49r, cf. *Azarquiel*, p.352) is very close to the 2^s 16;45,21° used by Ibn al-Kammād, a student of al-Zarqāllu (*Toomer 2*, p. 321). It is possible that the discrepancy is due to a difference in the calculation of precession.

4. *Planetary Equation Tables*

By and large, these tables are, for al-Qusunṭīnī, the same as the analogous ones in the Khwārizmī *zīj* (*Suter 2*, pp.132-167), except that, whereas in the latter the entries for sun and moon have been carried to seconds, in the former they have been truncated (not rounded) to minutes. Thus the solar and lunar tables have been calculated by the "method of declinations":

$$e = e_{\max} \cdot \delta(\varkappa)/\varepsilon \ ,$$

where e is the equation, δ the solar declination function, $\varkappa$ the center (see Section 5 below and the accompanying figure), and ε is the obliquity of the ecliptic. The planetary equations of the center are:

$$e = e_{\max} \sin \varkappa,$$

hence were computed by the "method of sines". The epicyclic equations are based on the standard eccentric model.

	center	epicyclic
sun	2;1[4]°	
moon	4;56	
Saturn	8;3[6]	5;44°
Jupiter	5;[6]	10;52
Mars	11;13	40;31
Venus	2;14	47;11
Mercury	4;1	21;30

where square brackets around a digit indicate restorations of scribal errors. Of these there are a good many. For instance, by plotting each of the ninety entries in the solar equation table it can be shown that about a dozen of them are erroneous.

The numbers cited above are standard parameters of Indian astronomy. The method of declinations may be from Sasanian Iran or early Islamic; it is not Ptolemaic (see *Neugebauer 2*, pp. 95-101).

sun	0;59,8,11,30,5,56, close to the value in the *Toledan Tables* (see *Toomer, 1*, p. 44) which is that of Ibn al-Bannā' (see *Vernet, 1.*).
solar apsidal motion	0;0,0,2,7,11, found with Ibn al-Bannā' due to al-Zarqāllu, see *Toomer*, 2, p.316.
moon	13;10,34,52,48, the same as al-Khwārizmī, ibn al-Bannā', and the *Toledan Tables.*
moon (anomaly)	13;3,53,56,19 essentially the value of Ptolemy and many others, including the *Toledan Tables.*
lunar nodes	– 0;3,10,46,57,52, close to Ibn al-Bannā' and the *Toeldan Tables.*
Saturn	0;2,0,27,50,55, close to Ibn al-Bannā'.
Jupiter	0;4,59,7,37,54, close to Ibn al-Bannā' and the *Toledan Tables.*
Mars	0;31,26,30,0,51.
Venus (anomaly)	0;36,59,28,13,46,16, close to the value of the Ilkhānī Zīj (cf. *Kennedy*, Zīj No.6).
Mercury (anomaly)	3;6,24,7,55
trepidation	0;0,0,53,20,31

These numbers exhibit a relation to Andalusian and Maghribi astronomy, which is not surprising. It will be seen in the next section that al-Qusunṭīnī's planetary equation tables are simplified versions of those of al-Khwārizmī, the extant version of whose zīj was transmitted via Muslim Spain. Nevertheless the mean motions above are independent of al-Khwārizmī's ultimately Indian parameters (cf. *Neugebauer 2*, p.93, and *Burckhardt.*).

On f. 50r (and again on 53r) the following list of apogee longitudes is given, with no date (a superscript *s* denotes a zodiacal sign, i.e. 30°):

Saturn	7^s 29;43°
Jupiter	5 9;43
Mars	4 2;13
sun	2 17;19
Venus	2 17;19
Mercury	6 18;24

A marginal note, apparently in the same hand as the text, says that the distance from the apogee of Mercury to that of the sun is 4^s 1;8°. In fact, since 2^s 17;19° + 4^s 1;8° = 6^s 18;27°, the statement is almost correct. Since in the Arabic alphabetical numeral system the symbols for 4 (د) and 7 (ز) are easily confused, restoration of Mercury's apogee to 6^s 18;27° would make the note correct.

For the three superior planets the distances between their apogees is exactly the same as those in al-Battānī's zīj (*Nallino*, vol. 1, p.241). But al-Qusun-

times of the five, or occasionally in the Maghrib six, daily prayers.[1]

As elsewhere in the medieval Islamic world there existed in the Maghrib alongside this scientific activity in astronomy a tradition of primitive folk astronomy. The pronouncements of one Abū Miqraᶜ, who lived in the thirteenth century, were accorded far more respect than was warranted by their scientific content.[2]

About the year 1300 the astronomer Ibn al-Bannā' compiled an almanac of the same kind as the earlier and better-known *Calendar of Cordova*.[3] At the end of the fourteenth century a certain al-Jādarī wrote a poem on timekeeping which was much commented upon in later centuries.[4] This kind of material is worth studying for its own sake but also has special rewards for the historian of science: in an anonymous commentary on al-Jādarī's poem compiled in Tlemcen in the sixteenth century there are accounts of considerable historical interest concerning earlier Maghribi activity in measurements of the obliquity of the ecliptic (see above), trepidation, and twilight determinations.[5]

Astronomical activity in the Maghrib continued until the colonial period, but by then the great *zīj*es of Ibn Isḥāq and Ibn al-Bannā' and most of the underlying theory had been long forgotten. Rather, a plethora of poems on folk astronomy and on the use of the almucantar and sine quadrants for timekeeping were the favorite reading of those who passed as astronomers.[6] As we have shown, the earlier Maghribi tradition was relatively rich and is of considerable importance to the history of Islamic astronomy. Furthermore as we have noted, most of the relevant sources have yet to be studied properly. The historical and biographical sources must also be exploited before we can gain a clearer picture of astronomy in the medieval Maghrib.

3. *Mean Motion Parameters and Apsidal Positions*

From the mean motion tables the underlying base parameters were "suqeezed" by a process of successive divisions of total mean travel by the respective time spans involved. The results, in degrees per day, are tabulated below, accompanied by comments where appropriate.

1. See, for example, *Mayer*, p. 67. Nevertheless, the term seems to relate originally to an astronomer capable of reckoning the equations (*taᶜdīl*) of the sun, moon, and planets.
2. On Abū Miqraᶜ see *Colin & Renaud*. See also *Cairo Survey*, no. F17 and F49.
3. Translated in *Renaud 8*.
4. On al-Jādarī see *Suter 1*, no. 424a; *Renaud 1*, no. 424a; and *Cairo Survey*, no. F26.
5. This commentary is extant in MSS Cairo K 4311 (defective) and also London B.L. 411, 2.
6. On some late Maghribi astronomical works see *Renaud 2* and *7*.

fourteenth century, astrolabes of excellent construction were being produced.[1] In the late thirteenth and early fourteenth centuries there were constructed in Fez two astronomical clocks, of a kind known otherwise only from mid-fourteenth century Damascus. The first clock was set up in the Qarawiyyīn Mosque[2] and the second in the Buʿināniyya madrasa:[3] both were water-clocks fitted with an astrolabic rete. The first clock, in its later form, is still *in situ* although the gear mechanisms have gone, and most of the second clock has disappeared: the remains of both clocks have been investigated by Prof. Derek J. de Solla Price. Several later Maghribi astrolabes and quadrants survive in museums around the world,[4] attesting to a continuing interest in instrumentation in the Maghrib until the nineteenth century.

In the fourteenth century extensive sets of tables for time-keeping by the sun and stars and for regulating the astronomically-defined times of prayer were compiled in Tunis after the model of the tables currently in use in Damascus.[5] Another smaller set of tables for regulating the times of prayer was prepared for different localities in Morocco.[6] A sundial from fourteenth century Tunis reflects the interest of the Maghribis in times of day with special religious significance that had no counterpart in contemporary practice in Mamluk Egypt and Syria.[7] The times are not displayed on a later Tunisian sundial in the Mosque of Sīdī ʿUqba in Qayrawān,[8] but yet other times are tabulated in some Ottoman prayer-tables for Algiers.[9] The position of the *muʿaddil* appears to have been the Maghribi equivalent to of the *muwaqqit* of the Mamluk world, that is, the astronomers associated with mosques and madrasas who were responsible for regulating the astronomically-defined

1. See, for example, *Mayer*, p. 32 on the works of Abū Bakr b. Yūsuf of Marrakesh and Supplement, p. 294 on ʿAlī b. Ibrāhīm of Taza. (Another incomplete astrolabe made by him is preserved in the Musée d'Histoire des Sciences in Geneva.)

2. See Mayer, p. 67 *sub* Muḥammad al-Ḥabbāk, p. 77 *sub* Muḥammad aṣ-Ṣinhājī, p. 73 *sub* Muḥammad b. Muḥammad b. al-ʿArabī, and *Azzawi*, p. 216 *sub* Ibn al-Lajāʾī, for references to the historical sources on this clock, and more recently *Price* for a thorough investigation. On the clock in Damascus see the brief remarks in the article on Ibn al-Shāṭir in *DSB* by D. A. King.

3. See *Mayer*, p. 40 *sub* ʿAlī b. Aḥmad, and also *Price*.

4. See, for example, *Mayer*, pp. 60-61 *sub* Muḥammad b. Aḥmad, and also *Janin* on a Tunisian quadrant.

5. On these Tunisian tables see the brief remarks in *King 1*, pp. 192-193 and on the Syrian tables see *King 2*. More information is contained in the forthcoming *Studies in Astronomical Timekeeping in Medieval Islam* by the second author. The various Tunisian tables are preserved in MSS Berlin Ahlwardt 5724 and Cairo DM 689.

6. These tables are extant in MS Cairo TR 338,2 - see *Cairo Cat.* and *Survey*, no. F35 for details.

7. See *King 1* for a detailed description of this sundial. (On p. 189 the dimensions of the sundial should be 24 cms. × 24 cms. and not 24 × 34 as stated.) See also *King 3*, pp. 367-370 on some later Maghribi and Andalusian texts on sundial theory.

8. *Cf.* *Janin*, pp. 208-211 and *King 3*, pp. 369-370 on this instrument.

9. These tables are preserved in MS Cairo TFT 9,1: see *Cairo Cat.* and *Survey*, no. F68 for details.

The Moroccan scholar Ibn al-Bannā' commpiled a *zīj* in Marrakesh about the year 1300.[1] This survives in several copies but the tables have yet to be studied properly. The astronomer Ibn al-Raqqām compiled in Tunis in the early fourteenth century two *zīj*es, both of which are extant in unique manuscripts and have yet to be studied.[2] One of Ibn al-Raqqām's *zīj*es is said by the author to be based on another by Abū'l-Ḥasan ibn ᶜAbd al-Ḥaqq called Ibn al-Hā'm, a person otherwise unknown to us. The *zīj* of al-Qusunṭīnī was not the only baby *zīj* compiled in the Maghrib. Ibn al-Qunfudh in the late fourteenth century compiled a small *zīj* for Tlemcen based on the *zīj* of Ibn al-Bannā'.[3] No other *zīj*es specifically for Fez or Tlemcen are known to us.

A recension for Algiers of the *zīj* of Ibn al-Shāṭir, the celebrated astronomer of fourteenth-century Damascus, is known from a single manuscript.[4] Considerably more influential was the *zīj* of Ulugh Beg, compiled in fifteenth-century Samarqand: Tunisian recensions were prepared by Abū ᶜAbd Allāh Muḥammad al-Tūnisī known as Sanjaq Dār and by Ḥusayn Quṣᶜa, and both survive in several copies.[5] The late fifteenth century Jewish astronomer Zacuto compiled his perpetual almanac in Salamanca.[6] These tables in a modified form were apparently used in the Maghrib (as well as in Ottoman Turkey), and the introduction to them was translated into Arabic by Andalusian astronomers.

In Marrakesh in the early thirteenth century and in Taza in the early

1. On Ibn al-Bannā' see the article in the *DSB* by J. Vernet; *Suter 1*, no. 399; *Renaud 1*, no. 399; *Renaud 5*; and *Cairo Survey*, no. F23. The introduction to his *zīj* is translated in *Vernet 1*.

2. On Ibn al-Raqqām see *Suter 1*, nos. 388 and 417 (?); *Brockelmann*, SII, p. 378; and *Cairo Survey*, no. F 22. His *Shāmil Zīj* is in MS Istanbul Kandilli 249 and his *Qawīm Zīj* is in the Museo Naval de Madrid – see *Vernet 2*, pp. 297-298.

Prof. F. Sezgin has recently drawn attention to a manuscript which he lists as a Maghribi recension of the *zīj* of the eighth-century astronomer al-Fazārī (on whom see the article in *DSB* by D. Pingree), this manuscript being supposedly preserved in Rabat. See further *Sezgin*, VI, p. 123, no. 1. The *zīj*, entitled *al-Zīj al-Qawīm*, has, however, nothing to do with al-Fazārī – see already the discussion in *King 4*, p. 57. Prof. George Saliba of Columbia University informs us that the manuscript is actually in Fez, not Rabat, and that it was listed in a catalog of rare manuscripts exhibited at the Qarawiyyin in Fez in 1960. In this catalog, published in Rabat, the author is identified as Muḥammad b. Ibrāhīm, that is, Ibn al-Raqqām, not al-Fazārī. Thus this manuscript is probably another copy of the *Qawīm Zīj* of Ibn al-Raqqām.

3. On Ibn al-Qunfudh see *Suter 1*, no. 422; *Renaud 1*, no. 422; *Cairo Survey*, no. F25; and also note 4 on p. 4 above.

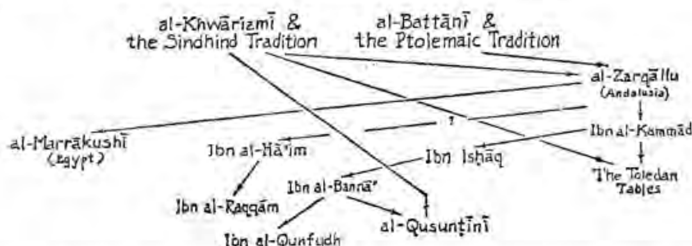
4. On the *zīj* of Ibn al-Shāṭir see *Kennedy 1*, no. 11. The Algerian recension is extant in MS Cairo DM 533.

5. On the *zīj* of Ulugh Beg see *Kennedy 1*, no. 12. On the copies of the Tunisian recensions preserved in Cairo see *Cairo Survey*, nos. F47 and F53-55.

6. On Zacuto see the article in the *DSB* by J. Vernet. On the manuscripts of his almanac see *Goldstein 2*, especially pp. 239-248. MS Cairo DM 1081 contains a Maghribi version of the almanac and several Arabic treatises relating to it – *cf. Cairo Survey*, no. F 31.

appear to have had more influence in Europe than they had in later Islamic astronomy.[1] The Andalusian astronomer Ibn al-Kammād seems to have based his *zījes* on the work of al-Zarqāllu, and at least one of his *zījes* was in use in the Maghrib in the thirteenth century.[2] A Maghribi astronomer who is known to have relied on a *zīj* of Ibn al-Kammād and also on the observations of a Sicilian Jew, was Ibn Isḥāq, a Tunisian who worked in Morrocco in the early thirteenth century.[3] He compiled a *zīj* which Ibn Khaldūn tells us was widely used in the Maghrib in the fourteenth century; a copy of this work was recently discovered by the second author in Hyderabad, and awaits detailed study. Ibn Isḥāq quotes several earlier scholars whose works are no longer available in their original form: for example, in his chapter on lunar crescent visibility he cites the opinions of the earlier Andalusian astronomers Ibn Muᶜādh and Abū'l-Ḥajjāj al-Sabtī, the latter a student of Maimonides,[4] as well as others whose names are new to the modern literature (see Section 6 below).

In passing we should mention that the late thirteenth-century scholar Abū ᶜAlī al-Marrākushī,[5] author of an enormous compendium on spherical astronomy and instruments entitled *Jāmiᶜ al-mabādi' wa'l-ghāyāt*, hailed from the Maghrib but wrote his treatise in Cairo. Indeed, al-Marrākushī's work, which was highly influential in Egypt, Syria, and Turkey, appears to have been unknown in the Maghrib. al-Marrākushī quotes such sources as al-Zarqāllu and Ibn al-Kammād, but a thorough investigation of his sources for his writings on instruments has yet to be undertaken. Transmission and influences are indicated in the chart below.



1. On al-Zarqāllu see the article in the *DSB* by J. Vernet. See also *Toomer 1* on the *Toledan Tables* and 2 on al-Zarqāllu's solar theory.

2. On Ibn al-Kammād see *Suter 1*, no. 487; *Kennedy 1*, nos. 5, 66 and 72; and *Toomer 2*, pp. 330-331.

3. On Ibn Isḥāq see *Suter 1*, no. 356. See also *Rosenthal*, III, pp. 136-137 for the remarks of Ibn Khaldūn. The manuscript of his *zīj* is MS Hyderabad Andra Pradesh State Library no. 298 (*ca.* 200 folios, copied *ca.* 1400).

4. On Ibn Muᶜādh see the article "al-Jayyānī" in the *DSB* by Y. Dold-Samplonius and H. Hermelink. On al-Sabtī see *Suter 1*, no. 342.

5. On al-Marrākushī see *Suter 1*, no. 363 and *Cairo Survey*, no. C17. The first half of his treatise, which deals with spherical astronomy and sundials is translated in *Sédillot-père*. The second half, which deals with other instruments, was summarized in a rather haphazard fashion in *Sédillot-fils*.

it, but that he inherited the method from some much earlier source, probably through unknown intermediaries.

Section 6 is a detailed table of contents of the entire *zij*. Readers who need information concerning the contents of a normal *zij*, or conventions involving symbols, may consult *Kennedy 1*. The entries in the tables are expressed in the standard medieval Arabic alphanumerical notation.[1] Standard topics omitted by al-Qusunṭīnī are: trigonometric functions, planetary latitudes, fixed stars, geographical coordinates, and astrological functions. Of special interest is a lunar ripeness table.

2. *Brief Survey of Astronomy in the Maghrib*

The following account is the first attempt in the modern literature to outline the history of astronomy in the Maghrib.[2] The evidence indicates that such cities as Marrakesh, Tunis, Taza, and Tlemcen, were the scene of an active tradition of astronomy for several centuries. Until the available sources are investigated more thoroughly it will be difficult to establish the connections between the Andalusian and Maghribi traditions in astronomy.[3] Prof. G. Toomer, in his penetrating study of the solar theory of the eleventh-century Andalusian astronomer al-Zarqāllu, has already demonstrated the importance of Maghribi material based on earlier Andalusian sources that are no longer extant in their original form.[4]

From the first five centuries of Islam only one author is known to us from the Maghrib, namely, the astrologer Ibn Abī'l-Rijāl, who worked at the Zirid court in Tunis *ca.* 1045.[5] Thereafter we have reports of isolated measurements of the obliquity of the ecliptic conducted by an unnamed astronomer in Meknes, by Ibn Hilāl in Sebta, by al-Mirrīkh in Marrakesh, and by Ibn al-Turjumān in an unspecified location, all dating apparently from the twelfth and thirteenth centuries.[6]

The activities of al-Zarqāllu in Cordova and Toledo in the eleventh century

1. *Cf. Irani* on this notation.

2. The standard bio-bibliographical sources in which Maghribi astronomers and their works are listed are the following: *Suter 1*; *Renaud 1*; *Brockelmann*, II, pp. 331-332 and 615-616, and SII, pp. 364-365 and 707-709; *Azzawi*, pp. 209-221; and *Cairo Survey*, Section F. See also *Renaud 2* on astronomy in Morocco and *King 1*, pp. 192-193 on astronomy in Tunis. On Maghribi astrolabists and their works see *Gunther*, I, pp. 248-301; *Renaud 4*; *Mayer*, *passim*; and *Brieux & Maddison*. Maghribi contributions to mathematics are surveyed in *Djebbar*.

For catalogs of Maghribi manuscript collections see *Sezgin*, VI, pp. 329-332, 402-407, and 454-456, and on two particularly rich collections of scientific manuscripts see *Renaud 7* and *Samsó*.

3. On the Andalusian tradition see the numerous publications of J. Millás Vallicrosa, J. Vernet Ginés, and J. Samsó Moyá.

4. *Cf. Toomer 2*.

5. On Ibn Abī'l-Rijāl see note 4 to Section 1 above.

6. These individuals are mentioned in the anonymous commentary on al-Jādarī's poem, on which see note 5 on p. 9.

extant in Arabic in which the planetary theory is essentially Indian rather than Ptolemaic. This Indian planetary theory, popular amongst certain early Muslim astronomers,[1] and not without influence in Andalusia and the Maghrib throughout the medieval period, is known to be based on pre-Ptolemaic Greek astronomical models.[2] The *zīj* of al-Khwārizmī was also based on Indian planetary theory, but it has survived only in the Latin translation of an extensive reworking of the original by al-Majrīṭī.[3]

The unique manuscript source of al-Qusunṭīnī's *zīj* is ff. 44v-63v of MS Escorial ar. 909.[4] The first part of the same manuscript contains a copy of the *zīj* of the thirteenth-century Moroccan astronomer Ibn al-Bannā', upon which, as will be seen below, al-Qusunṭīnī leans heavily. Al-Qusunṭīnī's *zīj* is reproduced in facsimile on pp. 22-41 below with kind permission of the authorities of the Biblioteca de El Escorial. The introduction is written in *rajaz* meter.

In Section 2 we attempt to put al-Qusunṭīnī in the context of astronomy in the medieval Maghrib. No clear picture of this general topic can be presented at this time. The known sources present a multiplicity of historical problems, and some of the most important sources have only recently been rediscovered and have not been studied yet.

In the next section, 3, al-Qusunṭīnī's mean motion parameters are displayed and discussed. They are seen to be from Western Arabic sources, independent of al-Khwārizmī's mean motions. The same is true of his planetary apogees, also presented.

In Section 4, however, it is shown that al-Qusunṭīnī's planetary "equation" tables are essentially the same as those of al-Khwārizmī, except that seconds of arc have been suppressed.

Section 5 is an attempt to infer from al-Qusunṭīnī's rules his method of calculating planetary true longitudes. We suggest that the solution is an algorism which, like the equation tables, is firmly in the Indian (and Sasanian Iranian, and early Islamic) tradition, but which is considerably more primitive than any related rule hitherto noted. We do not think our author originated

1. On the influence of Indian astronomy in early Islamic astronomy see *Pingree 1*. (Prof. Pingree informs us that there are several Sanskrit manuscripts in existence of a work entitled *Yantra Jarkali*, suggesting that al-Zarqāllu's works had some modest influence in later Indian astronomy.)

2. See *Pingree 2* for an overview of Indian astronomy.

3. On al-Khwārizmī see the article by G. Toomer in the *DSB*. A medieval Latin translation of al-Majrīṭī's recension of his *zīj* is published in *Suter 2*. A translation and commentary is in *Neugebauer 2*. Further insight into the original work is provided in *Goldstein 2*. On the Byzantine and medieval Latin traditions based on the *Zīj al-Sindhind*, see *Pingree 3*, pp. 151-169, and *Pingree 4*.

4. On the manuscript see *Renaud 2*, pp. 7-10. The manuscript is of Maghribi provenance, but is not dated. It contains (1) the *zīj* of Ibn al-Bannā'; (2) the *zīj* of al-Qusunṭīnī; and (3) a commentary by Ibn al-Qunfudh (*Suter 1*, no. 422) on the astrological poem of Ibn Abī'l-Rijāl (see note 4, p. 3). Renaud gives the name as al-Qusṭanṭīnī but the text has clearly al-Qusunṭīnī.

Indian Astronomy in Fourteenth Century Fez: The Versified Zīj of al-Qusunṭīnī

E. S. KENNEDY* & DAVID A. KING**

Acknowledgements: This study is based on work done by both authors at the American Research Center in Egypt, sponsored by the Smithsonian Institution, the National Science Foundation, Washington, D.C. and the Ford Foundation. This support is gratefully acknowledged.

It is a pleasure to thank the Biblioteca de El Escorial for permission to reproduce photographs of a manuscript in its collection.

A preliminary draft of this paper was kindly read by Dr. David Pingree of Brown University, and his various suggestions have been incorporated. The authors alone, however, are responsible for any errors and misinterpretations that remain.

1. *Introduction*

A certain Abū'l-Ḥasan ᶜAlī b. Abī ᶜAlī al-Qusunṭīnī[1] compiled in fourteenth-century Fez a sort of miniature *zīj*, or astronomical handbook comprising tables and explanatory text,[2] which he dedicated to the Merinid Sultan Ibrāhīm al-Mustaᶜīn. This *zīj* is distinguished by the fact that the explanatory text is in verse.[3] Many mathematical and astronomical poems, some of considerable sophistication, were composed during the Islamic Middle Ages; most of these were Maghribi compilations and most are as yet unstudied in modern times.[4] The fact that al-Qusunṭīnī's *zīj* is in verse, however, is not the reason for our studying the work. Rather, it is because the zīj is the only known document

* The American University of Beirut, Beirut, Lebanon.

** Department of Near Eastern Languages and Literatures, New York University, 50 Washington Square South, New York, New York 10003, USA.

1. Al-Qusunṭīnī and his *zīj* are mentioned in *Suter*, no. 371; *Renaud 1*, no. 371; and *Brockelmann*, S II, pp. 364-365. (References in italics are to the bibliography at the end of the paper). The epithet al-Qusunṭīnī indicates that our author or his family was originally from Qusunṭīniya (= Constantine) on the Algerian littoral. He is not known to have compiled any other works, but we have not consulted any medieval Maghribi biographical works. He is referred to as *al-faqīh*, which indicates his interest in law, and as *al-muᶜaddil*, which indicates that he was a professional time-keeper associated with a mosque and responsible for the regulation of the times of prayer.

2. A survey of Islamic *zījes* is *Kennedy 1*.

3. The only other *zīj* known to us which may have been written in verse is called *al-Zīj al-manẓūm*, and its arrangement in verse is implied by the title, *al-Sirr al-maktūm fi-l-ᶜamal bi'l-zīj al-manẓūm* of a work attributed to the fourteenth-century Syrian scholar Abū'l-Fidā' (*Suter 1*, no.392), and extant in a unique manuscript in Oxford. See further *Kennedy 2*, pp. 18 and 22.

4. Some examples of the most popular scientific works in verse are the astrological poem of Ibn Abī 'l-Rijāl (on whom see *Pingree 5* and *Sezgin*, VII, pp. 186-188; the poem on algebra by Ibn al-Yasmin (*Suter 1*, no. 320); the poem on timekeeping by al-Jādarī (*Suter 1*, no. 424a); and the poem on all aspects of science by ᶜAbd al-Raḥmān al-Fāsī entitled *al-Uqnūm* (*Renaud 1*, no. 541). Each of these authors worked in the Maghrib.